R

In. 5196!

Math. P. 513

Mathesis. Geometria specialis

295.

R

Beleuchtungen
der
interessanten Unterhaltung,
welche die
Conoide der Hyperbel
gewährt.

Erstes Heft
mit einer Kupferplatte

von
C. L. Schübler

--- Reculer les limites dela Science,
et d'en applanir l'abord; voila mon but!
d'*Alembert*

Mannheim,
bei Schwan und Göz 1792.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Durch unvermuthete Ereignisse, über welche ich mich hier nicht näher erklären kann, bin ich veranlasst worden, meine Arbeiten über die Hyperbel in zwei Hefte zu zerschlagen, und so getrennt herauszugeben. Das zweite Heft soll aber in dem vorseienden Sommer noch ebenfalls im Druk erscheinen; wenigstens soll es an meiner Förderung gewiß nicht fehlen, damit die Liebhaber in Mathem. das Ganze, welches ich Ihnen zugleich

und

und unzertrennt mitzutheilen im Sinn hatte, wenigstens bald zusammen erhalten.

Bis dieses im Publicum vorhanden seyn wird, möchte ich wohl um Suspension schriftlicher Beurtheilungen geziemend bitten.

Geschrieben, den 12ten April 1792.

Zu Heilbronn am Nekar.

C. L. Schübler.

Einleitung.

Die Theorie der Conoiden, oder der krummen Linien, welche man auch Linien der zwoten Ordnung zu nenen pflegt, wie auch der Flächen, und Sphäroiden, die dadurch gebildet werden, hat mich bei meinem Selbst-Studium der höhern Mathematik wol über ein Jahr beschäftigt, bis ich sie nach und nach so faßte, daß ich mir selber dabei ein Genüge leistete. Ich gelangte nicht leicht und bequem hiezu. Unzählige Zweifel und Bedenklichkeiten beunruhigten mich, und hielten mich auf. An mündlichen Besprechungen mit Freunden über die

Gegenstände meines Nachdenkens in diesem Fach fehlte es mir gänzlich. Die Liebhaberei an höherer Geometrie ist in meiner Gegned ganz fremd. Sie ist es in den meisten Gegenden von Deutschland. Es wäre wol unbillig, als über etwas ausserordentliches darüber zu klagen! — Aber eine unangenehme Situation ist und bleibt es doch immer, Wochen und Monaten-lange, versteckten Wahrheiten, die man für interessant hält, nachzusinnen, und die Ursachen der Zögerungen auf den Wegen der Evidenz, so wie die endlich-glückliche Resultate seines Nachdenkens, niemand — keiner lebendigen Seele mittheilen zu können.

Ich will mich nicht weiter umständlich hierüber auslassen. Mathematik belohnt sich am Ende dennoch selber; und ihre Belohnungen, sind nicht armselig, wenn man nur den Muth und die Gedult nicht verliert, bis zu gewissen Zielen durchzuringen, die freilich nicht gar nahe und nicht niedrig liegen können; (obgleich viele Leute es nicht glauben, und die Sprache gar nicht gestatten wollen, daß es grose und erhabne Ziele seyn sollen!) Mathematik belohnt

sich

sich redlich selber; So belohnet keine andre Wissenschaft die Verwendung von Kräften und Zeit, wie sie, wenn man anders nicht aus Bequemlichkeit sich schlechte Ziele wählt, oder es erzwingen will, daß sie durchaus recht nahe liegen sollen. — —

Ich habe sogleich im Eingang vom Studium der Conoiden geredet. Bei der erwähnten Schwierigkeit, ihre Eigenschaften genügend zu fassen, mus ich aber doch hier unverweilt den Unterschied machen, daß in so ferne sich die Lehrvorträge über

die Parabel,
die Ellipse,
und die Hyperbel,

jeder besonders, betrachten lassen, mir wenigstens die Theorien der Parabel und der Ellipse jederzeit der viel leichter und geschwindübersehlicher geschienen haben, als die der Hyperbel. Die leztere ist viel verwickelter; es eröffnet sich bei derselben gleichsam ein weit grösseres Feld von neuen bei den zwei andern Conoiden gar nicht vorkommenden Verhältnissen. Aber eben die dabei eintretende manigfaltigere

Aussichten gewähren auch, wenn man sich einige Zeit in diesem Feld umgesehen hat, um so grössere Vergnügungen des Geistes, welche man beim ersten Eintritt in die gedachte unbekannte grose Region gewiß nicht erwartet hatte. Die Theorie der Hyperbel führt zur Analysis des Unendlichen; man gelangt durch Betrachtungen dieser Conoide selbst zur Versinnlichung gewisser Hauptsäze dieser Analysis, welche ohne sie (als leere Abstractionen) blose Gegenstände der trokkensten Speculation geblieben wären; Die linearische Darstellung der zur Hyperbel gehörigen Linien führt zur Intuition, wo man gar kein Subject von Anschaulichkeit mehr nur vermuthen sollte. —

Die grösten Männer, welche seit 150 Jahren höhere Mathematik ausgebildet haben, schienen unabgeredet doch gleichsam einverstanden zu seyn, daß die Schärfe des durchdringendsten menschlichen Wizes sich in Discussionen, die gerade diese Conoide angiengen, üben, und daß die Kräfte ungewöhnlicher Verstandes-Feinheit sich dabei beinahe probmäsig zeigen könnten. Des Cartes, L'Hopital, Newton, Leib-

Leibniz, die grosen Bernoullis, Cramer, Euler, fanden ein harmonisches Vergnügen darinn, die Kenntnisse dieses Kegelschnitts zu erweitern; und selber Anwendungen in höherer Mechanik aus den dabei entwickelten Theoremen zu deduciren, welche vollends die Vorwürfe fruchtloser Speculationen zu beseitigen geschickt waren, womit Halbkenner von Mathematik die Lehrvorträge von Analysis des Unendlichen so oft und viel, wie bekannt genug ist, geflissentlich zu demütigen bemüht sind. —

Ich will die Einleitung nicht zu gros machen. Vergnügungen des Geistes die von der Art, deren ich bisher erwähnt habe, sind, mitzutheilen, ist gewiß ein sehr erlaubtes Geschäfft. Es wird mehr als erlaubt, es wird auch wol verdienstlich zu nennen seyn, wenn damit Beleuchtungen und Entwicklungen unter das Publikum kommen, oder doch mehrern Freunden ernsten Nachdenkens und solider Lectüre nahe gebracht werden, welche meistens nur in lateinischen oder französischen Quartanten versteckt liegen, und (wenige Ausnahmen abgerechnet) verkannt und unbenüzt verschlafen, wenn

sie nicht von Zeit zu Zeit neu bearbeitet, in nicht-misfälligem modernem Gewande aufgestellt, erscheinen, und wieder erscheinen, bis man nach und nach das Interesse anerkennt, das sie verdienen.

Die Folge dieser Blätter wird übrigens zeugen, daß ich aus den angeführten oder andern Mathematikern gar nicht nur mechanisch abgeschrieben habe. Vieles, was ich sehr zerstreut fand, hab' ich freilich nur gesammelt, und in so ferne ich sammelte, und längst erwiesene Lehrsäze wieder vortragen mußte, allerdings was niemand neu nennen kann, wiederholt. Aber bei diesen Wiederholungen selbst liessen sich von mir viele Zwischenbegriffe einschieben, deren Unterlassung mir die Evidenz immer sehr zu erschweren schien, so wie im Gegentheil die Erinnerung daran, (oder die Ergreiffung dieser Zwischenbegriffe) wenigstens meinem Bedünken nach, die Bahnen ebner und leichter macht, welche der Auto-didaktos in Mathematik hiebei zu wandeln hat.

Ich habe besonders auf sehr vielen Blättern auf diesen Rüksicht genommen; Ich habe mich

mich im Geist in die einsamen Stunden zurük versezt, in welchen ich, als Anfänger so oft in Gefar war, im Denken zu ermüden, und die Durchforschung der zuverlässigsten Warheiten aus Verzweiflung aufzugeben. Dieser Stunden waren nicht wenige; ich vergesse sie nie ganz, so sehr ich auch jezt oft mich wundern mus, wie ich manchmal so muthlos seyn, Buch und Feder wegwerfen, und wegen einzelner dunkler Formeln, wegen aufhaltender Kleinigkeiten, die Vortrefflichkeit einer ganzen Theorie bezweifeln, oder als von einer fatalen Grübelei mich mismüthig davon wegwenden konnte! — — Nicht nur als unruhigem, Eile liebenden, Jüngling, noch als Mann, ist mirs also ergangen.

„Vielleicht kannst du doch beitragen, daß „es andern nicht eben so ergehen möge! Viel„leicht kannst du doch manchem lehrbegierigen „Freund von Mathematik, der deine Lieblings„Wissenschaft philosophisch treibt, eine unan„genehme halbe Stunde ersparen!" — dachte ich bei mir selbst, und ergriff die Feder, aufzusezen, und so gut ichs konnte, mitzutheilen, was die folgenden Blätter enthalten.

Wer mir aber etwa darum den Wahn beilegen wollte, ich hätte es unternommen, die Schriften anderer Gelehrten, die über eben dieses Sûjet geschrieben haben, entbehrlich zu machen, oder gar zu verdunkeln, der würde meine Absicht sehr misverstehen, und wahrscheinlich vermittelst eben dieser Wendung zu sehr nachtheiligen Beurtheilungen veranlaßt werden; — — welche ich übrigens, falls ich sie dennoch etwa verdient haben möchte, durch gar keine weitere Entschuldigungen, oder schleichende Captationes Benevolentiae abzulehnen gemeint bin

---

Erste Lucubration über die Erzeugung und Darstellung der Hyperbel.

§. 1

Um mit der Gestalt der Hyperbel zuerst bekannt zu werden, schlage ich vor, folgende Actus in der Vorstellung nach und nach durchzugehen.

Man denke sich einen geraden senkrechten Kegel, conum rectum; oder, wie der alte Harsdörfer will, man stelle einen feinen wolgespizten Zuckerhut vor sich hin.

Diesen Conus denke man sich zuerst in der Mitte durchschnitten, so daß eine ebene sehr dünne Fläche, (ein Planum,) von der Scheitel-Spize perpendiculär herunter, bis auf den

Dia-

Diameter der Bodenfläche des Conus, führe, und so den ganzen Conus im Hindurchfahren in zwei gleiche Helfte theilte. Notwendig wird durch den Act dieses Schnitts ein gleichschenklichtes Dreiek, oder wenn man lieber will, zwei solche Dreieke werden dadurch auf den innern Flächen der erwähnten zwo Helften entstehen. Dieses innere gleichschenklichte Dreiek, das also in jedem Conus in der Mitte liegt, heißt man

den Axen-Triangel.

Es bedarf wol keiner grosen Anstrengung der Phantasie, um denselben, auch wenn kein wirklicher Schnitt vorgenommen wird, in dem Innern eines jeden Kegels zu denken, und seine Seiten auf der Oberfläche des Kegels sich vorzustellen.

Dieser Axen-Triangel ist unleugbar jederzeit der gröste, der sich durch einen perpendiculären Zug oder Schnitt aus dem Cmus schneiden läßt. Allein man kann sich sehr viele Nebenschnitte denken, welche paalel mit dem gedachten mittlern Hauptschnit geführt wer-

werden können. Die Extrimitäten der Flächen aber, welche man durch solche paralele Nebenschritte erhält, sind keine gerade Linien, wie es die Extremitäten des Axen-Triangels sind; sondern es sind krumme Linien, deren Krümmung oder Flexion zunimmt, je entfernter der Nebenschnitt von dem mittlern Hauptschnitt geführt wird, und welche überdem zum Scheitel keine Spitze haben, wie sie der Axen-Triangel hat, sondern deren Scheitel in eine bald mehr, bald minderenge Wölbung zusammenfließt, je nachdem der Schnitt dem paralelen Axentriangel sich mehr oder weniger nährt.

Betrachtet man zwei solche krumme Linien mit dem Scheitel, in welchem sie sich vereinigen, als eine einzige (motu continuo entstandene) krumme Linie, so heißt dieselbe die Hyperbel, und deren Schenkel sind also auf der Oberfläche des Kegels, durch einen solchen Schnitt verursachte, und durch seine Richtung bestimmte Ertremitäten. Der Scheitel der Hyperbel muß beinahe der Scheitel-Spize eines geradlinichten Dreieks gleich zu-

ach-

achten seyn, wenn die Hyperbel sehr nahe an dem Axentriangel genommen wird. Wird sie aber weit davon weg (aus eben dem Conus) geschnitten, so kann ihr Scheitel in einen Bogen fallen, der nicht einmal die Krümmung eines Cirkelbogens hat, sondern sogleich weiter ausläufft, so daß man allerdings dabei nicht mehr füglich von einer engen Wölbung sprechen kann. Bei sehr vielen andern Hyperbelschnitten mag sich diese Phrasis aber doch immer rechtfertigen lassen.

Gedenkt man sich einen unendlich-grosen Conus, dessen Axen also unendlich-lang seyn müßte, so werden die Schenkel der Hyperbeln, welche sich aus einem solchem Conus schneiden lassen, auch unendlich seyn, und sie werden immer weiter und weiter auseinander gehen, je mehr sie sich von ihrem Scheitel entfernen. Man muß sich frühzeitig mit der Vorstellung unendlicher Schenkel bekannt machen, weil dieselbe in höherer Geometrie gar oft vorkommen. Daher habe ich diese Eigenschaft der Hyperbel sogleich beibringen wollen.

§ 2.

§. 2.

Der Deutlichkeit wegen, und um recht leicht gefaßt zu werden, habe ich bisher blos von perpendikulären Schnitten, und von Hyperbeln, deren Flächen der Fläche des senkrechten Axen-Triangels paralel laufen, geredet. Freilich lassen sich aus jedem Conus unzälig viel solche Hyperbeln schneiden. Aber nicht blos der senkrechte Schnitt giebt eine Hyperbel. Er kann auch schief geführt werden, so daß die Schenkel der Hyperbel sich der Grundlinie des Axen-Triangels nähern, oder so, daß sie sich von derselben entfernen. Dadurch entsteht eine grosse Manigfaltigkeit ähnlicher und unähnlicher Hyperbeln, und die Richtungen der Schnitte sind unzälig, die noch immer Hyperbeln geben.

Nur mus diese Richtung nicht so genommen werden, daß die Axe des Durchschnitts mit der einen Seite des Axentriangels, d. h. mit einer entgegenstehenden äussern Seiten-Linie des Conus paralel liefe. Dann dadurch entstünde eine Parabel, keine Hyperbel:

Und zweitens auch nicht so, daß der Schnitt durch den Axen-Triangel gar hindurch gienge,

gienge, und also von dem grösern Conus einen kleinern oben weg trennte. Denn damit erhielte man entweder eine Kreisfläche, oder eine Ellipse; (eine Kreisfläche, wenn der so ganz durchgehende Schnitt horizontal, eine Ellipse, wenn er schief geführt würde.)

Diese Richtungen führe ich hier nur der Unterscheidung wegen an; sie sollen uns in diesen Blättern nicht weiter beschäftigen; sie führen auf die erstgenannte zwei andern Kegelschnitte, welche in andern Werken erläutert werden. Nur zufällig, oder wo es die Deutlichkeit erfordert, werde ich dieselben noch manchmal erwähnen.

§. 3.

Bei allen trichterförmigen Gefäsen läßt sich ein Conus denken; nur stellt sich derselbe bald mehr, bald weniger vollkommen dar. Ich habe alte Kelchgläser gesehen, deren innre Flächen reine Kegelformen sind. Warscheinlich meinte der alte Härsdörfer (in seinen Mathem. Erquikstunden Th. 2. S. 100.) dergleichen, wenn er von Scharmü-

müzelgläsern redet, in denen sich die drei Conoiden, die Parabel, die Ellipse, und die Hyperbel, durch eingegossenen Wein, jenachdem man das Gefäs neige, sichtbar darstellen liessen. Ich habe die Versuche für mich mit Aufmerksamkeit wiederholt.

Der Kelch darf niemals ganz mit Wasser oder Wein gefüllt werden, wenn man die drei Kegelschnitte sehen will, wie sich das gewiß leicht begreiffen läßt.

Füllt man ihn aber etwas über oder unter die Helfte, und bedekt ihn mit einem Teller, so lassen sich darauf, wenn man den Kelch mit dem Teller nach und nach umstürzt oder neigt, die drei genannten Gestalten auf den obern Flächen des Fluidums ersehen. Hiebei mache ich aber die Bemerkung, welche wol verdient beherziget zu werden:

Mit einem und ebendemselben Quantum von Wein oder Wasser, das in dem Kelch ist, läßt sich nur bei einer einzigen bestimmten Neigung des Kelchs eine Parabel bilden, oder die Gestalt dieser Conoïde hervorbringen.

Aber mit ebendemselben Quantum von Wein oder Wasser, lassen sich, je nachdem man den

Kelch neigt, sehr viele verschiedene Hyperbeln bilden; Freilich nur eine einzige, deren Fläche der Fläche des Axentriangels paralel läuft, aber sehr viele andre, welche schief gegen diese Fläche zu laufen, oder schief sich von derselben entfernen.

Die einzige, deren Fläche der Fläche des Axentrinangels paralel läuft, erhält man, wenn man den Teller perpendikulär auf seinen Rand stellt, also auf einen Winkel von 90 Grad (mit dem Tisch);

Die übrigen unzählig = verschiedenen Hyperbeln aber, wenn man den Teller neigt, so daß der Winkel stumpfer oder spiziger als 90 Grad wird. Denkt man nun daran, daß die Aenderungen der Winkel nicht nur durch Grade und Minuten, sondern auch durch Secunden und Terzen gehen können, und daß jede andre Neigung wieder eine Hyperbel geben mus, so wird wol einleuchtend, daß vermittelst eines und eben desselben Quantums Wasser in einem vollkommen = conischen Kelchglas sich unzählig = viele von einander verschiedene Hyperbeln sichtbar bilden lassen.

Um

Um Ellipsen in eben dem Glas darzustellen; bedarf es nicht einmal eines Tellers, an den das Glas fest anzudrücken wäre, wie bei der Parabel und Hyperbel wol erforderlich ist; Die Ellipse formirt sich selbst, während man aus einem conischen Glas trinkt. So oft der Trinker schlürft, so oft trinkt er gleichsam den Scheitel einer Ellipse weg, und er sieht sogleich wieder eine vor sich, die länglichter, als die vorige, aber doch wieder eine Ellipse ist. Dabei halte ich mich nicht weiter auf; es gehört nicht zu meinem Zweck, über Ellipsen zu disseriren.

§. 4.

Ich habe in meinem bisher geführten Vortrag mich auf keine Zeichnung oder Figur bezogen. Ich wollte einen Versuch machen, wie weit sich die allgemeinste Hauptvorstellungen der Hyperbel beibringen liessen, ohne etwas von a und b und x in den Context der laufenden Rede zu bringen; und ich getraute mir jezt wol, diesen Versuch noch weiter fortzusezen, und auch andre Eigenschaften der Hyperbel, durch ähnliche Versinnlichungen begreiflich

zu machen, und ziemlich genügend auseinander zu sezen.

Aber ich würde dadurch nothwendig in grose Weitläufigkeiten gerathen, worinn ich manche Lehre auf mehrere Seiten dürfte ausdehnen müssen, welche sich, wenn ich mich auf bestimmte Figuren beziehen, und dabei die lineari-sche Grösen durch Buchstaben ausdrücken darf, in wenigen Zeilen viel reiner und unzweifelhafter darstellen lassen. Deshalb lege ich sogleich in der beigefügten Fig. 1. zwei entgegengesezte Hyperbeln vor; und ersuche meine Leser, dieselbe mit Rückerinnerung an meine in den vorigen Blättern mitgetheilte Fundamental-Vorstellungen aufmerksam zu betrachten.

Es ist dabei geflissentlich eine Hyperbel, die durch einen schiefen Schnitt (in den Conus) erzeugt worden, angenommen. Denn wenn der Schnitt senkrecht geführt wird, so läßt sich eigentlich nur ein Schenkel der Hyperbel, SA, in der Zeichnung vorstellen; der andre aber AO, liegt ganz hinter dem erstern, so daß er in der versuchten Darstellung auf einer ebenen Fläche un-

unsichtbar werden muß, weil ihn der erstere deckt.

Aus gleicher Ursache ist von dem ofterwähnten Axen-Triangel in der Figur gar nichts, als die eine Seite ES zu sehen. Die andre Seite dieses Axen Triangels wird nehmlich von der Seite, die man sieht, ganz bedeckt, wie auch die Grundlinie desselben noch dazu. Diese Grundlinie ist ein Diameter der Bodenfläche des Conus, und fällt in der Zeichnung nothwendig unter ein Stück von ES selbst. In perspectivischen Delineationen läßt sich freilich diese zweite Seite, zugleich mit der Basis, angeben.

Diese schief geschnittene Hyperbel unserer Figur nun hat A zum Scheitel.

Die Linien SG und MP sind zwo Ordinaten* in derselben, von welchen die erstere SG vom Scheitel entfernter liegt, als MP.

*) Ich nenne, der Sprache der neuern Mathematiker gemäs, Ordinaten, was die Alten Semiordinaten nannten.

Bei zwo Ordinaten hat man sich nothwendig auch zwo Abscissen zu denken. Sie sind AG und AP.

Es liesen sich, leicht begreiflich, noch sehr viele Ordinaten und Abscissen in diese Hyperbel hinein zeichnen. Aber zu den nächstfolgenden Theoremen haben wir nicht mehr, als dieses Paar nöthig; welches frühzeitig genug erhellen wird.

Ehe wir uns aber damit näher beschäftigen, laßt uns unser Augenmerk auf die entgegengesezte Hyperbel in dem obern, dem untern ganz gleichen Conus richten. Sie heißt (in der Fig. I.) Bmx. Ihr Scheitel ist bei B. Sie ist der Untern vollkommen gleich und ähnlich. In der Zeichnung auf Ebnen läßt sich die leztere Behauptung nicht immer wol einleuchtend vorstellen. Die Flächen der Schnitte, welche die 2 entgegengesezte Hyperbeln geben, haben oft ein sehr verschiedenes Aussehen. Aber die Warheit der Angabe erhellet doch bald aus mehreren sehr sichern Schlüssen. Diese Schlüsse sind sehr leicht, wenn die zwei entgegengesezte Hyperbeln durch senkrechte, mit

den

den Axentriangeln paralele, Schnitte erzeugt worden sind, und es bedarf gar keines scharfen Nachdenkens, um davon überzeugt zu werden; aber sie sind schwerer, und erfordern mehrere Mittelbegriffe, (diese Schlüsse) wenn man schiefgeschnittene Hyperbeln annimmt. Ich lasse den Beweis für den leztern Fall daher jezt noch geflissentlich zurück. Eine vertraute Bekanntschaft mit den Säzen, welche auf den nächstfolgenden Blättern folgen werden, dürfte ihn sehr erleichtern.

§. 5.

Laßt uns den Abstand der zween Scheitel unserer zwo entgegengesezten Hyperbeln betrachten! AB, in der Fig. I. Dieser Abstand heißt

die Zwerg-Axe, latus transversum, auch die erste Axe der Hyperbel, auch die grose Axe.

Die Mitte dieser Linie, C, heißt der Mittelpunct der Hyperbel.

Daher sind AC und CB zwo Helften dieser ersten Axe. Viele Algebraiker nennen dieser Dichotomie wegen sowol, als wegen gewisser Bequemlichkeiten, welche erst der Erfolg des

Calküls lehret, diese erste Axe 2a; und daher

AC = a; und auch CB = a

Andre nennen die ganze erste Axe a; und daher AC = $\frac{1}{2}$ a; und CB eben so.

Ich werde meistens die erste Bezeichnung annehmen, und deßhalb auch

die zwote Axe, latus rectum, oder

die kleine Axe der Hyperbel = 2b,

folglich die Helfte derselben, EC = b benennen. In den Kästnerischen Schriften heißt aber die zwote Axe meistens c, und ihre Helfte = $\frac{1}{2}$ c.

In unserer Fig. 1. sieht man nur die Helfte dieser zwoten oder kleinen Axe, EC, vor sich. Aber, wenn man sich zwo entgegengesezte Hyperbeln auf der linken Seite des Conus denkt, ganz so geschnitten, wie die zwo, welche das Auge in der Figur zur Rechten wirklich sieht, und denkt sich deren Abstände durch eine gerade Linie verbunden, wie hier zur Rechten, d. h. und denkt sich zur Linken, eine erste oder grose Axe, wie AB zur Rechten, und diese zwei erste Axen einander gleich und paralel; so kann es gar nicht fehlen, wohin und wie

gros

gros die zwote oder kleine Axe zu sezen sei; sie ist = 2 EC; und geht von C durch E, als die gemeinschaftliche Scheitel-Spize der beeden Kegel. Der Mittelpunct ihrer Helfte ist eben da in E.

Man betrachte die Scheitelwinkel bei E. Sie sind spizig; man denke sie sich weniger spizig man denke sie sich nach und nach zunehmend bis zu rechten Winkeln.

So wie die Winkel zunehmen, wird auch die Länge der zwoten Axe zunehmen; die Zwerch-axe oder die erste, (grose) Axe wird aber dagegen abnehmen. Wenn die Scheitel-Winkel wirklich bis zu 90 Gr. heran gewachsen, also rechte Winkel worden sind, so wird die erste Axe der zweiten ganz gleich seyn. Die Hyperbeln, welche in diesem Fall aus den zwei so gearteten Kegeln geschnitten werden können, heißt man

gleichseitige Hyperbeln.

Wachsen aber die gedachte Scheitel-Winkel noch mehr, so daß sie über 90 Gr. betragen, also stumpfe W. werden, so wird die zweite Axe

größer, als die erstere erscheinen. Hieraus wird einleuchtend, warum viele Mathematiker Anstand genommen haben, die erste Axe, oder die Zwerchaxe die grose Axe zu nennen, und die zweite Axe die kleine, weil nehmlich in dem Fall der stumpfen Scheitel-Winkel die zweite Axe wirklich gröser als die erste wird, und man daher leicht in Sprachverwirrung zu gerathen Gefar läufft, wenn man die 2te schlechterdings die kleine benennt, und in allgemeinen Raisonnements mit der ersten vergleicht.

§. 6.

Man denke sich einen bestimmten Conus; also den Winkel an der Spize bei E ebenfalls bestimmt, und so lange man eben diesen Conus denkt, unveränderlich. Aus diesem Conus denke man sich mehrere Hyperbeln geschnitten; so wird sich mit jeder nach einer andern Richtung geschnittenen Hyperbel, der Winkel bei A. und also auch, GAT ändern, d. h. der Winkel, welchen die Absciße der geschnittenen Hyperbel, (AG) mit dem untern Stück der Seiten-Linie des Conus, (AT) macht.

Die-

Diesen veränderlichen Winkel, GAT, vergleiche man mit dem fest-bestimmten, und bei einem Conus unveränderlichen Winkel an der Spize bei E. Der veränderliche Winkel wird jederzeit kleiner seyn, als der unveränderliche an der Spize

Ang. GAT $<$ Ang. E.

So lange der Schnitt eine Hyperbel gibt, ist der Saz unumstößlich wahr. Der Winkel an der Abscisse kann niemals die Gröse des Winkels am Scheitel des Kegels erreichen.

Führte man den Schnitt aber wirklich so, daß diese Winkel beede sich gleich würden, so würde man damit keine Hyperbel, sondern eine Parabel aus dem Conus geschnitten haben.

Man betrachte nur einmal in unserer Figur die Abscisse AG, wie weit sie noch davon entfernt ist, der Seiten-Linie des Conus, ER, paralel zu laufen; und denke an die ersten Gründe der Geometrie zurück, und insbesondre an die Stellen, in welchen die Gleichheit der äussern und innern Winkel bei Paralel-Linien bewiesen wird. — — Ich halte mich nicht weiter hiebei

auf. Es fällt in die Augen, daß die erwähnte Eigenschaft der Winkel die Hyperbel wirklich charakterisirt: Der Winkel GAT mag sich ändern, wie er will, er mus immer doch klei- ner seyn als der Winkel E, wenn noch eine Hy- perbel bleiben soll.

§. 7.

Wie die Hyperbel durch Kegelschnitte erzeugt wird, und was die allernächste Erscheinungen, und Verhältnisse sind, wenn man den geführten Schnitt betrachtet, ist nun gezeigt. Wie die Hyperbel aber auch, blos als krumme Linie auf einer Ebene gezeichnet, und durch Lineal, Zirkel und Feder dargestellt wird, soll sogleich gezeigt werden.

Man zeichne eine gerade Linie, f F, und er- richte auf derselben zuerst ein stumpfwinklichtes Dreieck, fMF. Die Seite, welche dem stum- pfen Winkel entgegen steht, fM ist die gröste, und augenscheinlich bedeutend gröser, als die Seite MF.

*M

f -|————————|- F

A B

Man

Man gedenke sich ihren Unterschied, fM — MF; als eine besondre Linie, die AB heisen soll; Dieselbe wird weniger betragen, als die Grundlinie fF. Man lege sie auf oder in die Mitte dieser Grundlinie, wie hier angegeben ist.

Man errichte ein zweites noch mehr stumpfwinklichtes Dreiek auf eben der Basis fF, dessen zwo übrigen Seiten gröser, als fM, und MF, aber doch von solchen Längen seyn sollen, daß ihre Differenz wieder, wie vorher, der Linie AB gleich sei. Die Spize dieses zweiten Dreieks liege höher als M, aber nicht vertical über M, sondern seitwärts zur Rechten von M.

Man errichte ein drittes Dreiek auf eben der Basis fF, das noch stumpfwinklichter, als das zweite sei. Die zwei Seiten über der Basis sollen aber die nehmliche Differenz geben, welche fM — MF beträgt, oder = AB ist. Die Spize dieses Dreieks liege nun noch weiter zur Rechten von M hinauf.

So kann man fortfaren, und eine ganze Reihe von solchen Dreieken auf eben derselben

Ba=

Basis construiren, deren zwo übrige Seiten jederzeit die nehmliche Differenz geben. Ihre Spizen, wie M eine ist, formiren die krumme Linie der Hyperbel, oder doch einen Theil ihrer Schenkel, welcher durch diese Spizen hinläuft. Man kann sich unzälig-viele ganz nahe an einander liegende solche Spizen denken, wenn man sich unzälig-viele construirte Dreieke auf fF denkt. Jeder begreift leicht, daß es hiebei nur darum zu thun ist, mehrere recht nahe liegende Puncte zu erhalten, um die Figur der Hyperbel mechanisch zu verzeichnen. Aber man erhält diese Figur nicht bis zum Scheitel, wenn man nur allein stumpfwinkliche Dreieke construirt; Man gehe nun regressiv; nehme immer weniger stumpfwinkl. Dreieke an, so daß nach und nach FM ein Perpendikel, und fM die Hypotenuse eines rechtwinkl. Dreieks werde. Man fahre in dem Regressus fort, so daß bei F der Winkel der nächstfolgenden Dreieke spizig, und der bei M weniger spizig, und nach und nach sehr stumpf werde. Immer aber werde die Gröse der zwei obern Seiten so angenommen, daß fM — MF = AB bleiben. So wird man

allmälig

allmälig Punkte für den Bogen am Scheitel der Hyp. und bis an ihn hin bekommen. Man erreicht ihn endlich selbst, wenn der Winkel bei F und f unendlich klein, und der bei M unendlich gros, oder bis zu 180 Gr. gewachsen seyn wird. Aber damit fallen die 2 obern Seiten auf fF selbst, und das Dreiek verschwindet ganz und gar. — — So wird man mit der Figur der Hyperbel fertig!

Man gelangt zu dem nehmlichen Zweck durch Fäden ohne grose Kunst. Um, zum Beispiel, sechs Punkte zu erhalten, durch welche man die Linie der Hyperbel bequem zeichnen könne, nehme man sechs seidene Fäden, immer einen grösser, als den andern, die Länge des kleinsten betrage aber doch etwas mehr, als die Grundlinie, fF.

Man befestige diese sechs Fäden an ihrem linken Ende in f; und an ihrem rechten in F. Nun spanne man den kleinsten dieser Fäden einzeln oberhalb F, hinaufzu, an. (Man kann sich hiezu eines Steffts, oder der Spize einer Nadel bedienen.) Der Faden bildet damit

mit die Spize eines Dreieks, und zwei Dreiek-Schenkel dazu von der gedachter Spize aus, wie in die Augen fällt. Die Differenz der Längen dieser zwei Schenkel läßt sich vermittelst eines Zirkels, oder vermittelst eines neuen Fadens, der blos dem einzelnen kleinsten gleich ist, und frei in der Hand gehalten um so viel zurükgeschlagen wird, als der kürzere Schenkel *) beträgt, sehr leicht merken, und irgendwo auftragen. Diese Differenz heise die Linie AB.

Nun verlasse man den ersten kleinsten Faden, und spanne mit dem Stefft den zweiten etwas grössern. Wo und wie soll man aber diesen fassen? Nur ein Punct an demselben giebt zwei neue Schenkel, deren Differenz die Länge AB seyn kann. Man kann also gar nicht fehlen. Die Schenkel werden über die Schenkel des erstern Faden Dreieks hinziehen.

So

*) Man hat sich hiebei den kürzern Theil des Fadens, als den Subtrahenden, den längern als den Minuenden, und AB als den Rest vorzustellen, kann sich aber auch die oben benannte 2 Schenkel nebst der Basis als Segmente eines ganzen Fadens denken.

So verfährt man mit dem dritten, vierten, fünften, sechsten Faden ganz gleichförmig; und die Winkelpuncte der sechs gespannten Fäden geben sicher sechs Puncte der Hyperbel.

Verlangt man mehrere Puncte für sie, so nehme man mehrere Fäden — —

Blos alles recht deutlich zu fassen, rathe ich anfangs so successiv zu verfahren. Wenn man diesem Rath folgt, so wird man gar bald für sich selbst auf den mechanischen Handgriff gerathen, vermittelst dessen man nur einen einzigen Faden nöthig hat, und dennoch dadurch so viele Puncte einer Hyperbel angeben kann, als man anzugeben Lust findet; und damit wird man auch wohl schnell die Kunst errathen, wie die krumme Linie der Hyperbel sich mit einem Zug, durch eine ununterbrochne Bewegung, auf jeder Ebene zeichnen lasse.

Man wird in manchen Werken hierüber sehr dunkel aufgesezte Anweisungen antreffen; wenn man aber die Uebungen vornimmt, wel-

che

che ich angerathen habe, so dürften dieselbe, wie ich meine, leicht begreiflich werden.

§. 8.

Man nennt die zwei Endpuncte der Linie fF, die Brennpuncte der Hyperbel. Wenn die erste Axe AB zu beeden Seiten hin verlängert wird, so trifft sie sicher auf beede; und zwar ist f von A, dem Scheitel der einen Hyperbel, so weit entfernt, als F von B, dem Scheitel der andern. (Siehe Fig. II.)

Man nennt die beede Puncte auch Leitpuncte, die zwo Linien fM und Mf Fahrstriche, (radios vectores)

Wer den Innhalt des vorhergehenden §. 7 gefaßt hat, wird diese Ausdrüke ohne Mühe verstehen. Die Benennung Brennpuncte, wird aber erst ganz verständlich, wenn man die Anwendung der Hyperbel in Dioptrik gelernt hat.

Wie übrigens die Behauptung, daß jederzeit (fM—MF) = AB = 2a sei, das heißt: daß jederzeit die Differenz zwoer Linien, fM und MF, wel-

aus den beeden Brennpuncten der zwei entgegengesezten Hyperbeln nach einem Puncte in den Schenkel der einen Hyperbel geführt werden, der ersten Axe, (oder = 2a) sei, wie diese Behauptungen mit den analytischen Grundberechnungen der Hyperbel ganz übereinkommen, wird in den folgenden Blättern gezeigt werden. Bis hieher war blos von mechanischem Verfahren die Rede, was man thun, und wie man Hand anlegen müsse, um die Gestalt der Hyperbel darzu stellen.

§. 9.

Noch eine Methode führe ich aus Hrn. Vegas vortreflichen Vorlesungen über die Mathem. Th. 2. §. 550 an; und setze seine Figur (hier als Fig. II) bei.

Seine Worte sind:

„Aus der gegebenen geraden Linie fF, und „B'A' kann eine Hyperbel beschrieben werden, „wenn man die Linie B'A' verlängert, auf „derselben mehrere Puncte G nach Belieben „annimmt, sodann mit dem Halbmesser B'G „aus F einen Kreisbogen beschreibt, und darauf diesen Kreisbogen, mit dem Halbmesser

„GA[1] aus F durchschneidet, um die Puncte „M, m, der Hyperbel zu erhalten. Auf diese „Art kann man so viel Puncte bestimmen, „als nur erforderlich ist.“

Hiebei ist also vorausgesetzt 1) man kenne bereits den Abstand der Brennpuncte f, F, als gegeben, und bestimmt. 2) Man kenne die Gröse der ersten Axe BA, oder AB als eine bestimmte Linie, die immerdar kürzer als fF ist.

Diese Linie wird besonders irgendwo aufgetragen, und (anstatt BA) geschrieben B'A'. Alsdann wird sie verlängert um G'A. Nun ergreift man den Zirkel, um Bogen mit Annahme zweier Radien zu beschreiben. Um die Uebereinkunft des Verfarens mit dem in §. 7 gelehrten einzusehen, bedenke man, daß aus der Fundamental-Gleichung: fM — MF = BA eine zweite sehr leicht folge, wenn man beiderseits + MF addirt; Nehmlich daraus wird: fM = BA + MF. Also ist fM, der Schenkel, welcher dem Winkel bei F entgegenliegt) jederzeit so gros als die Summe der ersten Axe, und der Linie MF. Dieses gibt den einen Radius ab. Unter MF denke man sich A'G, das ver-

verlängerte Stück der geraden Linie AB; dieß giebt den andern Radius ab; So wird man den Vegaischen Vortrag leicht verstehen. Für einen andern Punct M, (oder wie M,) der höher und weiter vom Scheitel der Hyperbel wegliegen soll, wird MF nothwendig länger seyn; ebenso aber auch A'G, das Ansazstück an B'A mus für einen solchen Punct mehr verlängert werwerden, um zween grössere Radien zu erhalten, deren Differenzgröse immer = 2a seyn mus.

§. 10.

Zulezt noch mus ich auch derjenigen Construirung der Hyperbel erwähnen, bei welcher weder die erste Axe noch die zweite gegeben ist, sondern blos die Stelle der Brennpuncte, und die Lage einer sogenannten Directions-Linie MM. Man sehe meine Fig. III. an:

Gegeben und bekannt sei also der bestimmte Punct F, als der eine Focus der Hyperbel; und die Lage einer gewissen geraden Linie von unbestimmter Länge NN, deren Entfernung von dem Punct F sich messen läßt, folglich ebenfalls als bestimmt angenommen werden darf = FO.

Warum man die Linie NN die Directions-Linie nennt, wird gar bald erhellen.

Nun nehme man folgendes vor: Man theile die gedachte Abstandslinie FO in zwei ungleiche Segmente FA + AO; das untre Segment FA sei gröser, als das obere AO. Man markire den Punct A deutlich, daß man die Länge des grösern Segments FA immer genau sehen könne. Von diesem Punct A zeichne man eine Paralele mit der Directions-Linie, welche gerade so lang, als das Segment FA selbst sei. Die Paralele heise AG. Also AG = FA. Damit hat man einen rechten Winkel bei A, der OAG heisen wird; und wenn man die Hypotenuse OG zieht, so hat man ein rechtwinkl. Dreiek, das eben so, OAG, heisen mus. Die Hypotenuse OG verlängere man wenigstens so lange, bis ein Perpendikel, aus dem Brennpunct F, errichtet das Stück der Verlängerung treffen könne. Dieses Stück heise GR. Endlich wähle man auf dem Segment FA einen Punct willkührlich p; errichte aus demselben ein Perpendikel Sp dessen Höhe, einen Punct in der Linie GR erreiche;

reiche; fasse die Länge dieser Linie Sp mit einem Zirkel, und trage sie zum zweitenmal so auf, daß ihr eines Ende in den Brennpunct F falle, und ihr andres in einen Punct, J, von ihr selbst, (in einen Punct in der Länge Sp selbst befindlich,) d. h. man mache das Perpendikel Sp zur Hypotenuse FJ; so wird der Punct J in die Curve der Hyperbel fallen.

So wie nun dieser Punct gefunden ist, wird man unzälige Puncte finden können, die ebenfalls in der Hyperbel liegen müssen; Der Punct p ist ja willkürlich zu wählen; er kann weiter oben, er kann weiter unter angenommen, und darauf können Perpendikel, wie Sp, errichtet werden, so viel man nur verlangt, welche alle wieder andre und Hypotenusen geben werden, wie FJ ist, deren eines Ende (von allen) fest in dem Brennpunct F liegen, das andre aber jederzeit andre und andre Puncte derselben Hyperbel geben wird. Vermittelst solcher Puncte und durch sie läßt sich die Curve selbst ohne Schwürigkeit verzeichnen.

Die Richtigkeit dieses Verfarens, um eine Hyperbel zu erzeugen, wird wol erst ganz begreiflich, wenn man die Analysis über diese

Conoide in vollkommenem Zusammenhang durchgegangen hat. Doch wird folgende kurze Betrachtung auch hier schon füglich angestellt werden können:

Die Linien AG und Sp sind Paralel-Linien. Denn es sind ja Perpendikel auf der geraden Linie, Op, errichtet. Nun sehe man einmal das rechtwink. Dreiek SOp aufmerksam an. Ein Theil dieses Dreieks, und ähnlich demselben ist das rechtw. Dreiek OAG daher ist die Analogie nicht zu bezweifeln:

Sp zu Op = AG zu AO:

(Basis zu Kathetus in dem einen Dreiek, wie in dem andern.) Nun ziehe man nur noch eine Hülfslinie IN, d. i. eine Paralele mit Op, welche derselben vollkommene Länge haben mus, (weil die Directions-Linie mit Ip paralel läuft) so läßt sich IN für Op in die angeführte Proportion einsezen. Ferner aber läßt sich auch die Hypotenuse FI für das Perpend. Sp. einsezen; (man darf nur die Zeilen nachlesen, welche angeben, wo FI herkommt, wie diese Linie angelegt wird, wie lang sie sei) — — Also mus gelten

anstatt

anstatt Sp zu Op = AG zu AO
eben so viel FI zu IN = AG zu AO

Für das dritte Glied AG läßt sich auch FA sezen, weil oben die Annahme so war, AG = FA. Daher wird die ganze Proportion auch heissen:

FI zu IN = wie FA zu AO

und diese Vorstellung ist die interessanteste, weil FA und AO, die zwei Segmente der Linie FO (der Entfernung des Brennpuncts von der Direct. Linie) sind; und nunmehr die Behauptung an den Tag kommt, daß sich diese zwei Segmeute jederzeit so verhalten, wie eine Linie (FI) von dem Brennpunct auf irgend einen Punct der Hyperbel gezogen, sich gegen IN, den Abstand dieses Puncts von der Directions-Linie, verhält.

FA : AO = FI : IN.

Vermittelst dieser unveränderlichen Verhältniß kann man jeden Punkt in der Curve, auch jede Absciße und Ordinate der Hyperbel prüfen; und der beständige Exponent dieser angeführten Proportion bestimmt eigentlich die Conoide der Hyperbel selbst; (est ratio determinans hyperbolae, sprechen die alten Lehrer Kegelschnitts.)

Ich füge hier nur noch bei, (was zwar für sich in die Augen fällt) daß überhaupt bei allen angeführten Acten, als unveränderlich anzusehen seien: 1) die einmal angenommene Directionslinie 2) die zwei Segmente, deren Summe jederzeit den Abstand des Brennp. von der Mitte der Direct=Linie abgiebt; dagegen als veränderlich 1) die Linie, welche die Entfernung eines Puncts der Curve von dem Brennpunct seyn kann, und damit 2tens) die Linie, welche von einem solchen Punct der Curve auf die Dir. Linie perpendiculär gezogen wird. Aber die Verhältnis der zwei leztern Grösen gegeneinander (ihr Exponent) ist doch fest, (fixirt,) wenn gleich sie selbst veränderlich sind.

Betrachtungen von diesem Schlag machen es, meine ich, deutlich genug, was man unter Directions=Linie versteht, und rechtfertigen die Benennung selbst hinlänglich. Wer noch mehr Befriedigung verlangt, mus sich vor den folgenden analytischen Lucubrationen nicht scheuen.

Zwote Lucubration.

Ueber die Hyperbel

in Beziehung auf ihre Axen, Ordinaten, und Abscissen.

§. 11.

Die erste Axe der Hyperbel heise 2a; und werde, wie oben in §. 8. als Differenz, fM — MF gedacht.

Die erste Halbaxe wird daher = a seyn.

Um auch eine Gleichung für die zwote Axe, und zwote Halb-Axe, für 2b, und b, zubekommen, merke man mit einem auf Fig. II. gerichteten Blick, folgendes:

Die Abscissen lassen sich bei der Hyperbel (wie bei der Ellipse) vom Mittelpunct der ersten Axe C an rechnen; sie lassen sich aber auch vom Scheitel A an nehmen.

Nimmt man sie von C an, so begreift jede bejahte Abscisse die erste Halb-Axe, (CA, = a) und noch ein Stück derjenigen Linie dazu, welche die zwei Schenkel der Hyperbel in der Mitte theilt, und augenscheinlich nur als eine Verlängerungs-Linie der ersten Axe betrachtet werden kann. So ist z. B. die Abscisse CF = CA + AF; die Abscisse CP aber = CA + AP. Ich werde in den nächstfolgenden Blättern *) die Abscissen jederzeit so nehmen, und allgemein x heissen, so daß CP = x (hier eine bekannte Gr.) gilt.

Man könnte unter x also auch wol die Abscissen Linie CF denken; aber diese Linie soll doch einen besondern Buchstaben, der Rechnung wegen, erhalten, und bestimmt c heissen. Sie ist gerade die Entfernungs-Linie zwischen dem Mittelpunct der Hyperbel, C, und dem Brennpunct, F. Ihre zwei Segmente, CA und AF, sind die Helfte der ersten Axe, und der Abstand des Scheitels der Hyperbel von ihrem nächsten Brennpunct; und sie ist also synthetisch als die Summe von zwo sehr interessanten Linien zu betrachten. Aber sie ist

es

*) Erst unten §. 21. werden die Abscissen auch vom Scheitel an genommen werden.

es auch selbst darum, weil sie die Haupt-Gleichung für die zweite Axe der Hyperbel veranlaßt, oder doch einen wesentlichen Theil zu dieser wichtigen Gleichung liefert. Nehmlich diese Abscissenlinie, CF = c, mus besonders gefaßt, und in die vorhandene offene Fläche zwischen dem Mittelpunct und Scheitel der Hyperbel so aufgetragen werden, daß ihr eines Ende in den Scheitel der Hyperbel A selbst falle; ihr anders aber eine senkrechte Transversallinie erreiche, welche durch den Mittelpunct der Hyperbel hindurch in unbestimmter Länge gezogen, oder als allda schon vorhanden gedacht werden mus; Der Punct, wo diese Transversale unterhalb der ersten Axe *) erreicht

*) Es ist ganz gleichgültig, ob man die Linie CE = DA unterhalb oder oberhalb der ersten Axe anlegen mag. Blos der Figur wegen, um nicht zu viele Linien einander durchkreuzen zu lassen, ist hier DA unten herauf genommen. Uebrigens kann man sich das, was ich senkrechte Transversale nannte, auch als zwei entgegengesezte Perpendikel denken, welche in dem Mittelpunct der Hyperbel zusammentreffen Jedes dieser Perpendikkel oder wenn sie unbestimmt gezeichnet worden, jedes bestimmte Stück von beiden giebt eine Helfte der zweiten Axe:

reicht wird, heißt D in unserer Figur, so daß also DA so groß als CF = c ist, und daher nothwendig eine Hypotenuse in dem rechtwinkl. Dreiek DCA vorstellt.

In diesem Dreiek werde die Helfte der ersten Axe, CA, als Kathetus, und CD als Basis angesehen; so ist die nächste Folgerung aus dem Pythagor. Lehrsaz, daß das Quadrat der Basis, so gros als die Differenz der Quadrate der zwo andern Seiten, d. i. $DA^2 - CA^2 = CD^2$ sei. Ist nun DA = c angenommen, CA = a, so ist die Differenz der Quadrate dieser Grösen, $cc - aa = CD^2$. Und damit hat man eben die Gleichung für die Helfte der zweiten Axe, wenn die lezte quadrirt gedacht wird, d. i. $cc - aa$ ist $= bb$; und daher $\sqrt{(cc - aa)} = b$; folglich die Gleichung für die ganze zweite Axe, (was andre die kleine Axe der Hyperbel heisen,) ist $2. \sqrt{(cc - aa)} = 2b$.

Damit wird einleuchtend, daß sich die zweite Axe, wie auch deren Helfte, durch c und a oder eigentlich durch Potenzen dieser Grösen ausdrücken lasse. *) Weiter fließt daraus, daß

cc

*) Da $cc - aa = (c + a).(c - a)$ ist, wie jeder

Anfäng-

cc = aa + bb sei, d. h. die Entfernungslinie vom Mittelpunct der Hyperbel bis zum Brennpunct, quadrirt genommen, ist so gros, als die Summe der beeden quadrirten Halbaxen.

Bei

Anfänger der Buchstaben Rechnung schon weis, in der Figur selbst aber c + a die Linie fC + CA, oder kurz = fA beträgt; c − a aber CF − AF, oder kurz AF ausmacht, so wird (c + a) (c − a) = fA. FA; Aber fA + AF ist so gros als fFselbst. Folglich läßt sich dem Qu. der halbirten zweiten Axe, bb = cc − aa, ein Rechtek gleichstellen, welches durch zwei sehr sehr leicht zu findende Segmente der Hauptlinie fF errichtet werden kann. Der Scheitel A markirt die Länge der Segmente, so daß man gar nicht irren kann. Diese Bemerkung, daß bb = fA. AF sei, ist wol zu behalten. Unter andern folgt daraus, daß die bemeldte Halbaxe, b, die geometrische Mittelproportionale zwischen den beeden Segmenten sei fA : b = b : AF.

Für fA läßt sich auch BF schreiben. Alsdenn heißt der Saz: Die Halbaxe ist die geometr. Mittelprop. zwischen den Entfernungen eines Brennpunkts von den zwei Scheiteln der Hyperbel.

Bei der gleichseitigen Hyperbel, bei welcher die Axen gleich sind, läßt sich statt $aa + bb$ sezen: $aa + aa$ d. h. $2. aa = cc$ wo also das Quadrat der Linie c so viel Fläche halten mus, als das Duplum des Quadrats einer der beeden Halbaxen, (welche von beeden man wählen will) folglich so gros als ein Rechtek, dessen Höhe zur Basis sich, wie 2 zu 1 verhalten mus, seyn wird. In diesem Fall ist demnach die Linie c allein, (in der ersten Dimension) $= a \sqrt{2}$. Und dagegen jede der Halbaxen, unquadrirt,

a, oder $b = c : \sqrt{2}$; d. i. c divid per $\sqrt{2}$.

§. 12.

Man kann die Haupt-Gleichung für die Ordinate der Hyperbel, was man schlechthin die Gleichung für die Hyperbel zu nennen pflegt, finden, ehe man noch die Gleichung für die zwote Axe kennen gelernt hat (mit welcher ich so eben auf den drei lezten Seiten den Leser beschäftigen wollte.) Wenn man blos als bekannt, und gegeben annimmt:

1)

1) Die Entfernung der Brennpuncte vom Mittelpunct, oder CF = Cf = c

2) die Grösse der ersten Axe, 2a = Mf — MF.

3) die Absciſſe CP = x, als die Linie vom Mittelpunct der Hyp. bis zum Anfang der Ordinate (deren Gleichung man eben sucht) d. i. von C bis auf den Punct P, so läßt sich nehmlich aus diesen drei Grösen die Ordinate PM, welche allgemein y heiſſen soll, finden, wenn man auch die Gleichung zur 2ten Axe, oder cc — aa = bb noch nicht kennen sollte.

Dieses will ich sogleich darthun, darauf aber erst die Rechtfertigung anhängen, warum ich dennoch die Gleichungen, welche die zwote Axe angehen, in dem vorherg. §. 11. beigebracht habe.

Gegeben sind, wie gedacht, c, 2a, und x; Mit 2a zugleich die Differenz fM — MF. Die grösere dieser zwo Linien, fM, ist = 2a + MF, weil die Länge der Axe und des kleinern Fahrstrichs jederzeit dem grösern Fahrstrich gleich seyn mus. Man nenne den kleinern Fahrstrich z, so wird fM, der grössere, = 2a + z seyn Nun betrachte man noch in der Figur die zwo Abstände der 2 Brennpuncte von P, dem

Endpunct der Ordinate PM. Der eine Abstand, fP ist synthetisch betrachtet CP + Cf oder = x + c also eine Linie, welche die 2 Scheitel der beeden Perbeln durchschneidet, und jedesmal grösser, als die erste Axe selbst ist. Der zweite Abstand (der kleinere) ist FP, eine viel kleinere Linie, welche jederzeit innerhalb des disseitigen Schenkels der Hyperbel, wo die Ordinate selbst befindlich ist, liegt, und einen Theil der Abscisse ausmacht, folglich allemal kleiner als CP, oder x ist, und zwar bestimmt um CF kleiner, d. i. als Differenz anzusehen CP — CF, od. x — c.

Erst mit der Bekanntschaft dieser so vorgestellten *) gegebenen Grösen,

$$c, a, x, z, (2a + z), x + c, x - c,$$

aus=

*) Alles bisher angeführte giebt sich ohne künstliche Rechnung, und stellt sich dem Auge des aufmerksamen Beobachters in der Figur selbst dar. Wer sich noch nicht gewöhnt hat, bei zusammengesezten Linien aufmerksam zu seyn, will freilich manche Grösen nicht für gegeben anerkennen, die es doch sind. In der ganzen Theorie der Conoiden kommt es unzälig oft darauf an, gewisse lineariſche Grösen nicht schlechthin, (ohne Synthesis) sondern als Summen oder Differenzen von zwo andern Grösen anzusehen.

ausgerüstet, trit die Analysis auf, und führt durch folgende Actus zu der verlangten Gleichung für y selbst.

Ister Act. Weil die Ordinate MP senkrecht steht, so ist der kleine Fahrstrich FM, oder z als Hypotenuse des rechtw. Dreiecks FPM zu betrachten; und FP, oder x — c, als Basis; PM oder y selbst aber als Kathetus. Folglich ist das Quadrat der Hypotenuse, FM^2 oder

$zz = (x - c)^2 + yy$, od. $= xx - 2cx + cc + yy$,

IIter Act. Dagegen ist der andre Fahrstrich, fM oder $2a + z$, im Quadrat genommen:

$(2a + z)^2 = 4aa + 4az + zz$; aber auch als $fP^2 + PM^2$ anzusehen, weil sich fM auch als Hypotenuse eines rechtw. Dreiecks betrachten läßt, in welchem fP die Basis, PM der Kathetus wäre. Nimmt man nun für die Basis fP den Ausdruck $x + c$, und für PM wiederum y an, so wird ein neues Aequivalent als die Summen ihrer Quadrate eintreten, nehmlich $fP^2 + MP^2$ wird $= (x + c)^2 + yy. = fM^2$ seyn, und auseinander gesezt: $xx + 2cx + cc + yy$.

So hat man also einen doppelten Ausdruck für den grösern Fahrstrich, fM; oder für dessen Quadrat; der eine ist von $2a + z$ der andere von $x + c$ und y hergenommen.

IIIter Act. Man stelle diese zwo Aequivalente des Quadrats von fM neben einander; sie heisen, wie im IIten Act vorgekommen: $4aa + 4az + zz = xx + 2cx + cc + yy$ und wenn man den Werth für zz aus der Gleichung des Iten Acts einsezt:

$$4aa + 4az + xx - 2cx + cc + yy$$
$$= xx + 2cx + cc + yy$$

welches immer noch ebenso viel, als das Quadrat von FM betragen mus.

IVter Act. Man bemühe sich eine Gleichung für z allein zu erhalten. Diese Gröse kommt in den allererst gesezten Aequivalenten für das Qu. von fM nur einmal noch (linkerhand) vor. Wenn man xx, cc, und yy zu beden Seiten in der Gleichheit des IIIten Acts weglässt, so bleibt noch übrig

$$4aa + 4az - 2cx = + 2cx.$$

Und eine der nächsten Folgen aus dieser Gleichung ist, dass $4az$ so viel, als $4cx - 4aa$ betra-

betrage; daher az allein der Differenz cx — aa gleich seyn mus; und endlich erscheint die gesuchte Gröse z abgesondert stehend,

$$z = (cx - aa) : a, \text{ oder } [(cx : a) - a].$$

Was in der lezten Klammer [ ] befindlich ist, giebt einen Ausdruk für den kleinern Fahrstrich, FM, oder z, durch die bekannte linearische Grösen, c, a, und x. Dieser Ausdruk ist nicht wenig interessant *), und selbst

*) Es läßt sich sogleich die Bemerkung hiebei machen, daß aus diesen Gleichungen folge: das Aequivalent des grössern Fahrstrichs, fM, sei $= [(cx : a) + a]$. Denn, wenn wir jezt überzeugt sind, es sei fM oder

$z = [(cx : a) - a]$

so wissen wir auch $FM + a$, oder $a + z$ sei $= (cx : a)$

Nun kennen wir aber, aus obigem schon längst, die Gleichung für den grössern Fahrstrich,

$fM = 2a + z$, oder $a + z + a$

Da lasse man jezt nur für $a + z$ noch den Quotienten $(cx : a)$ einrükken, so erhält man doch gewiß keinen andern Werth für fM, als eben den behaupteten Ausdruk $[(cx : a) + a]$. Die Differenz dieser Aequivalente für die 2 Fahrstriche ist rein 2a; denn

$[(cx : a + a)] - [(cx : a) - a]$ giebt $a + a$,

wie nach §. 8. eben seyn soll, und nicht anders seyn darf.

notwendig eben in dieser Gestalt erforderlich, um zu dem gewünschten Zwek zu gelangen, und die Fundamentalgleichung für die Ordinate y gehörig zu finden, so daß ihr Werth gleichfalls nur aus c, a, und x zusammengesezt sei.

Vter Act. Man nehme das Quadrat des kleinern Fahrstrichs, z, und das Quadrat seines Werths, den die lezte Klammern umfasst, das heißt, man quadrire ganz die lezte Gleichung, wie folgt:

$$zz = (cc\ xx : aa) - 2cx + aa$$

und diesen Werth schreibe man neben oder unter das Aequivalent eben dieser Quadratgröse, welches bereits im ersten Act vorgekommen:

$$zz = xx - 2cx + cc + yy$$

VIter Act. In diesen zwei ausgesezten Gleichungen lasse man die in beeden ganz gleich vorkommende negative Gröse 2cx ganz weg; so bestehet sicher noch, freilich keine Gleichung für zz mehr, aber doch für sich gegeneinander genommen ganz gleich:

$$(ccxx : aa) + aa = xx + cc + yy;$$

und $(ccxx : aa) + aa - xx - cc = yy,$

ist

ist die in die Augen fallende Schlußgleichung, auf welche alles von Anfang her abgezwekt war; Nehmlich für das Quadrat der Ordinate, ist jezt eine Gleichung herausgebracht, in welcher auf der einen Seite, hier zur linken Hand, blos drei bekannte und gegebene Grösen, wie im Eingang dieses §. 12. versprochen worden, erscheinen.

Zugleich erhellet, daß es nicht notwendig war, die zweite oder kleine Axe, oder deren Helfte, b, zur Hülfe zu rufen, um zu dieser gesuchten Hauptgleichung zu gelangen. Ich will aber doch sogleich zeigen, wie die zweite Axe, oder die Signaturen ihrer Gröse in die erst angegebene Hauptgleichung der Ordinate kommen, und wie schiklich es sei, sie darinn aufzunehmen.

Unsre gefundene Gleichung zur Ordinate, (wie sie am Ende des sechsten Acts steht,) ist an sich ganz richtig; aber sie hat kein gutes Ansehn, sie ist nicht bequem, nicht geschmeidig eingerichtet, hat nicht die Eleganz der Form, welche die Algebraiker an interes-

santen Gleichungen gerne sehen. Wie lässt sich dafür wol noch Rath schaffen?

Man multiplicire die ganze Gleichung durch aa, das Quadrat der ersten Halbaxe; so wird vorhanden seyn:

$$cc\,xx + a^4 - aa.xx - aa.cc = yy.aa$$

Was da linkerhand steht,

ist eben so viel, als das Product der zwei Factoren

$$(cc - aa) . (xx - aa)$$

wie jeder finden wird, der diese zwei Differenzgrösen nur mit einander wirklich multipliciren mag. Deshalb gilt nunmehr kürzer

$$(cc - aa) . (xx - aa) = yy.aa$$

und daraufhin erhält man sogleich wieder durch Division die Hauptgleichung für das Quadrat der Ordinate:

$$[(cc - aa) . (xx - aa) : aa] = yy$$

Womit diese Fundamentalgleichung der Hyperbel schon zierlich genug ausgedrükt, da steht.

Aber nun sind wir an dem, sie noch viel geschmeidiger, darzustellen. Man erinnre sich nur zurük, wie oben in dem §. 11. die Gleichung zu dem Quadrat der halbirten zweiten Axe vorgelegt worden:

cc — aa sei so viel als bb

Dieses Aequivalent gebrauche man nun, und sezze es in unsre Fundamentalgleichung ein, so wird notwendig vorhanden seyn:

[bb . (xx — aa) : aa] = yy

und die unquadrirte Ordinate PM, oder y wird die Quadratwurzel der Gröse zwischen den Klammern zum Aequivalent haben:

√ [bb . (xx — aa) : aa] = y oder PM.

Auf diese Gleichung hinauszukommen, war der Zwek fast aller der Evolutionen, welche in den vorhergehenden Blättern aufgezeichnet standen. Die Entdekkung ist sehr schön. Ausser den Quadraten der Halbaxen kommt blos das Quadrat der Abscisse noch in der Gleichung zu yy vor; und selbst CF, oder c, die Linie des Abstands der Brennpunkte vom Mittelpunkt der Hyperbel, ist nun, wann und so oft man will, in der Rechnung gar nicht mehr vorhanden. Man hat also, der Strenge nach, nicht nöthig, diese Linie, als Zahlengröse zu kennen, wenn nach der Gröse einer gewissen Ordinate gefragt wird. Wenn man nur die dieser zugehörige Abscisse, CP = x, und die

zwei Axen der Hyperbel, oder deren Helften, kennet; so kann die vorgelegte Frage, dieser bewiesenen Formel gemäs, allemal unmittelbar beantwortet werden.

§. 13.

Man betrachte die Fundamentalgleichung zu yy aufmerksam. Wer nur einigermasen jemals gelernt hat, wie in Buchstaben-Formeln Proportionen verstekt liegen, wird gewiß ohne Mühe die nächstfolgende aus dieser aufgestellten Gleichung herleiten; oder aus ihr gleichsam herausziehen:

aa : zu bb = wie (xx — aa) : zu yy

Für die zwei ersten Glieder läßt sich unleugbar auch einsezzen:

4aa : zu 4bb . . . .

welches dient, die zwei leztern Gliedern mit den Quadraten der 2 ganzen Axen selbst zu vergleichen. Denn 4aa ist so viel, als (2a).(2a); und so 4bb so viel, als (2b) (2b)

Das dritte Glied beschäftige uns hiernächst einzeln. Es ist so viel, als (x+a).(x — a); d. h. so viel als BP. AP, wie niemand in Abrede stellen wird, der in die Figur blikt, BP

als

als (x+a) erkennt, AP aber, als x — a. Demnach läßt sich unter der Gröse des dritten Gliedes ein Rechtek denken, dessen längere Seite BP, die kürzere AP heissen mus.

Und so geht es daher recht füglich an, unter den 4 Gliedern der aufgestellten geometrischen Proportion sich vier geometrische Räume, vier bestimmte Flächen zu denken, von welchen drei reine Quadrate sind, nehmlich die Quadrate von a, von b, von y; blos das 3te Glied stellt ein Rechtek, oder die Differenz zweier Quadrate, (xx — aa), vor.

Aber die Vorstellung dieses so gebildeten Rechteks, wird noch interessanter, wenn man zwo gleiche Ordinaten in zwo entgegengesezten Hyperbeln denkt, PM, und P'M'. Die Abstandslinie zwischen beeden ist: (P'A+AP.) Nun ist augenscheinlich P'A so lang, als BP. Daher ist es auch gleichviel, ob man das Rechtek BP. AP, oder P'A. AP sezt. Daraus erhellet aber, daß sich das verlangte Rechtek (= xx — aa) errichten lasse, wenn man die Entfernungslinie der zwo Ordinaten in zwei ungleiche Segmente theilt, welche den Schei-

tel, A, der einen Hyperbel zum Scheidepunkt haben. So kann man also in Ansehung der Länge dieser Segmente niemals fehlen.

In der Note zu §. 11. (Seite 45) ist gezeigt worden, wie die quadrirte Halbaxe, bb so gros, als cc — aa, auch einem Rechtek, fA. AF, gleichzuachten sei, welches sich durch zwei Segmente der Linie fF errichten lasse. Man hefte den Blik auf die Linie fF, und hefte ihn darauf auf die Linie P′P; die leztere dekt die erstere, und fF ist nur gleichsam ein Mittelstük von P′P; oder die Abstandslinie der 2 Ordin. reicht über die der 2 Brennpunkte zu beeden Seiten gleich weit hinaus. Aber weiter: Ebenso liegt AB die erste Axe unter fF; und ist also ein mittler Theil von der Abstandslinie der Brennpunkte, und von der Abst. Lin. der 2 Ordinaten zugleich. Nun kann man die Combination dieser einander dekkenden Linien in folgenden Zusammenhang verfolgen.

(1) Die erste Axe, 2a, in zwei g l e i c h e Segmente getheilt, a und a, veranlaßt, wenn diese rechtwinklicht zusammengestellt werden, das reine Quadrat: aa.

(2)

(2) Die Abstandslin. der Brennpunkte, fF, in zwei ungleiche Segmente durch A getheilt, giebt, wenn diese Segm. rechtwinklicht construirt werden, ein Rechtek fA. AF $= (c+a).(c-a)$, so gros als bb.

(3) Die Abstandslinie der 2 Ordinaten, P′P, gleichförmig durch A in 2 ungleiche Segmente getheilt, giebt, wenn diese rechtwinklicht construirt werden, ein Rechtek P′A. AP $= (x+a).(x-a)$ so gros, als $xx - aa$.

(4) Die Ordinate, PM, quadrirt, giebt das Vierek, yy. (Denkt man sich PM, als Semiordinate, folglich erst 2y als ganze Ordinate, nach der Sprache der Alten, so kann man auch hier von 2 gleichen Segmenten, wie in nr. 1, und deren Zusammenstellung in rechte Winkel sprechen. So bliebe die Phantasie auf gleichem Weg.)

Unter diesen vier Nummern hat man nun gerade die vier Glieder der geomet. Proportion:

$$aa : (c+a)(c-a) = (x+a).(x-a) : yy$$

oder im Ausdruk der linearischen Bezeichnungen:

$$AC^q : fA.AF = P'A.AP : PM^q$$

Wie mir scheint, wird die Einbildungskraft durch

durch die Zusammenreihung von Vorstellungen, wie sie hier aneinander anschliessen, sehr angenehm beschäftiget und dadurch der Eindruk der Hauptsäzze selbst viel bleibender, als wenn man blos analytisch zum Schluß solcher Gleichungen, wie yy oder bb haben, eilt, und sie ohne Aufenthalt verlässt, um nur zu neuen Theoremen behende vorwärts zu rükken. In Lehrcompendien ist diese Eile, oder — wenn man lieber will, eine solche Gedrängtheit, freilich meistens notwendig.

§. 14.

Die Entfernung der 2 Ordinaten mus nicht gerade P'P seyn, wie freilich in der Figur des Beispiels wegen bestimmt angenommen ist. Die Ordinaten können weiter von einander, auch näher aneinander stehen. So kann es gar wol zutreffen, daß ihre Entfernung gerade so gros, als die der 2 Brennpunkte ist, wo also P'P = fF zu denken wäre. In diesem Fall stünden die Ordinaten auf den Brennpunkten selbst. Aus CP wird jezt CF, d. h. x gilt jezt = c. Folglich mus für xx — aa nun cc — aa eintreten dürfen, und umgekehrt; also auch bb.

Wenn

Wenn man dieses bedenkt, und sich der Proportion des vorhergehenden §phen erinnert, deren zweites Glied bb, und deren drittes xx — aa geheissen, so wird einleuchtend, daß man gegenwärtig die stetige Proportion erhalten müsse:

$$aa : bb = bb : yy$$

Daraus folgt zuerst: $aa.yy = b^4$; alsdenn $a.y = bb$; und hieraus die Gleichung für die Ordinate y allein $= (bb : a)$.

Diese Ordinate, doppelt genommen, 2y, heißt der Parameter der ersten Axe für die Hyperbel, und soll in Zukunft mit dem Buchstaben p bezeichnet werden.

In allen Hyperbeln hat man also diesen Parameter als eine durch den Brennpunkt gezogene gerade Linie, welche die beede Schenkel der Hyperbel erreicht, zu suchen. Sie schneidet die Absciſſe allemal unter rechten Winkeln; und ihre Helfte ist eine senkrechte Ordinate, deren zugehörige Absciſſe $x = c$ ist.

Aus der Gleichung, die diesem Parameter zugehört, läßt sich demnächst sehr leicht die Behauptung folgern: „daß er die dritte geome-

„trische

„trische Proportionallinie zu der ersten und zwo-
„ten Axe sei. Denn aus (bb : a) = y fließt

a : b = b : y : also auch

2a : 2b = 2b : 2y

Und diese Proportion legt zugleich dar, daß die zwote Axe die geometrische Mittelproportionale zwischen der ersten Axe und dem Parameter der ersten Axe sei; 2a; 2b; p.

Nebenher mag hiebei angemerkt werden, daß die Gleichung für diesen Parameter, welche uns p = (4.bb : 2a), oder kürzer (2bb : a) ist, in andern Schriften, in welchen die ganzen Axen, a und b heissen, notwendig in dem Ausdruk p = (bb : a) vorkommen müsse.

Der Parameter der zwoten Axe kommt viel seltner vor, als der der ersten. Man erhält ihn, wenn man die zulezt angeführte Proportion umwendet, und so sezt:

2b : 2a = 2a : (2aa : b)

Da ist das vierte Glied dieser Parameter der zwoten oder der kleinen Axe. Er heisse: P. Offenbar ist die grose Axe die geom. Mittelproportion zwischen ihm, und der kleinen Axe.

Als Linie, ist dieser Par. der zwoten Axe

grö-

gröser, als die grose Axe selbst, wie die Proportion für sich schon verräth. In der Folge reden wir gewöhnlich nicht von diesem, sondern von dem Parameter der ersten Axe. Uebrigens verhalten sich die 2 Parameter, umgekehrt wie die cubirte Axen, zu denen sie gehören, $p : P = b^3 : a^3$, wie dieses aus ihren 2 Gleichungen sehr leicht folget.

§. 15.

In der gleichseitigen Hyperbel sind die zwo Axen gleich gros; (s § 11 am Schluß) also $a = b$. Die angeführten Proportionen werden, wenn sie eine gleichseit Hyperbel angehen, durch diese Gleichung sehr einfach. Aus $2a : 2b = 2b : p$ wird $2a : 2a = 2a : p$. das heißt: p wird bei der gleichseitigen Hyp. zu 2a, oder auch zu 2b. Mit andern Worten: Der Parameter in d. gleichseit. Hyp. ist der ersten Axe ganz gleich, oder, wenn man lieber will, der zwoten; und statt Verhältnis tritt vollkommne Gleichheit ein, welches bei p, wie bei P, gilt.

Ohne Beziehung auf die Parameter, treten überhaupt bei der gleichseitigen Hyp. für die

Ordin.

Ordin. und Abſciſſen ſehr einfache Gleichungen ein, welche aus der Hauptproportion des §. 13. flieſen. Die zwei erſten Glieder derſelben $aa : bb$ heiſſen jezt notwendig $aa : aa$; daher die Proportionformel nun das Ausſehen erhält:

$$aa : aa = xx - aa : yy$$

Aber die 2 erſten Glieder ſind gleiche Gröſen; folglich iſt auch $xx - aa = yy$.

Damit leuchtet ein, daß das Qu. der Ordinate in der gleichſ. Hyp. einem Rechtek, das ſich ſehr leicht conſtruiren läſſt, gleich zu achten ſei: $(x+a).(x-a) = yy$

Desgleichen, daß $aa = xx - yy$ ſei; oder daß ein Vierek, auf der Helfte der erſten Axe errichtet, ſo viel Fläche habe, als ein Rechtek aus $(x+y)$ und $(x-y)$ conſtruirt. Eben ſo groß iſt hier: bb. Das Quadrat der Abſciſſe aber iſt da allemal der Summe zweier Quadrate gleich; $aa+yy = xx$; woraus man freilich ebenfalls durch Folgerung, wenn gleich nicht unmittelbar, doch leicht, ein Rechtek formiren kann.

Bei andern, als gleichſeitigen Hyperbeln, haben ſolche bequeme geometr. Conſtructionen

nicht

nicht statt. Es fällt der Einbildungskraft schwer, wo nicht meistens gar unmöglich, sich bei

$$[bb.(xx - aa) : aa] = yy$$

eine bestimmte Fläche, ein gewisses Rechtek, oder Vielek, unter der zwischen den Klammern befindlichen Gröse vorzustellen. Eben so wenig wird man durch das Aequivalent der quadrirten Abscisse, das hieraus folgt,

$$aa [1 + (yy : bb)] = xx$$

auf einzelne Linien hingewiesen, die man in Gedanken zu einer gewissen Figur zusammensezzen könnte, welche dem Innhalt der Formel entspräche. Nur bei der gleichseit. Hyp. geht es so füglich an, seine Imagination durch geometrische Darstellungen auf die gedachte Weise zu befriedigen, und die angeführte Formeln gleichsam ganz zu versinnlichen.

Ich verweile gegenwärtig nicht länger bei gleichseit. Hyp. insbesondere; und kehre zum Parameter in ungleichseitigen zurük.

§. 16.

Der Ausdruk des Parameters, (durch b und a) ist ganz von beständigen Grösen, von den zwo Axen, hergenommen. Weder x noch y kommt

in der Gleichung, welche sein Aequivalent darstellt, vor; also keine veränderliche Gröse. *) Daher wird er selbst auch unter die beständige Grösen bei der Hypelbel, (wie bei den andern Conoiden) gerechnet. Derselben sind überhaupt fünf: a, b, c, p, P.

Man kann jederzeit eine dieser Grösen durch zwo aus den andern ausdrükken, wie aus den angeführten Proportionen sich ohne Schwürigkeit ergiebt. So hat der Parameter p, neben dem ersten Ausdruk (2bb : a), auch noch den: 2.(cc — aa) : a; und (8a : PP).

Wie aber dieser Param. gegen die veränderl. Grösen, x und y, sich verhalte, und wie seine Aequivalente aussehen, wenn diese Grösen in seine Gleichung eingeschoben werden, soll nun ein Gegenstand unsrer Erwägungen seyn.

Blos Arithmetik liefert unter andern folgendes längst erwiesene Theorem:

„Wenn drei Grösen in einer stetigen Propor„tion stehen, so verhält sich die erste zu drit„ten,

*) Mehrere hiezu nöthige Ideencombinationen werden weiter unten hinlängliche Beleuchtungen erhalten.

„ten, wie das Quadrat der ersten zum Qua„drat der zwoten."

Solche Grösen sind 2a; 2b; p; wie in §. 14. vorgekommen. Dem Theorem gemäs *) mus also gelten:

$2a : p = (2a)^2 : (2b)^2$

das heißt $= 4aa : 4bb$; oder $= aa : bb$

Mit Worten ausgedrükt: Die erste Axe verhält sich zu ihrem Parameter, wie das Quadrat der ersten Axe zum Qu. der 2ten Axe. Die Quadrate der 2 Axen und Halbaxen sind aber oben in der Hauptanalogie bereits als 2 Verhältnisglieder vorgekommen:

E 2 aa

*) Den Beweis des Theorems giebt man sich am leichtesten, wenn man die stetige Proportion, mit beständigen Exponenten, etwa allgemein so ausgedrükt, denkt: l : el = el : eel; und alsdenn die Frage sich aufwirft: „Wenn eine andre Proportion fingirt würde, in welcher die drei erste Glieder gegeben, und zwar, l als das erste; eel, als das zweite; ll als das dritte, bekannt wären; wie müßte wol das vierte Glied heissen? --- Notwendig: eell. Denn unleugbar ist l : eel = ll : eell. Aber offenbar sind da die 2 lezten Glieder Quadrate von l und el, d. i. Qu: von der ersten und zweiten Proportionalgröse der stetigen Reihe l; el; eel.

$aa : bb = xx - aa : yy$

Gewiß läßt sich daher eben so gut behaupten:

$2a : p = xx - aa : yy$

In diesen Säzzen kommt die zwote Axe gar nicht mehr vor; und die Gleichungen, welche aus ihr folgen, haben eine ganz andre Gestalt, als die oben beigebrachten.

So wird der Parameter p jezt $(2ayy) : (xx - aa)$.

Die Abscisse im Quadrat, hat jezt das Aequivalent: $xx = (2ayy + aap) : p$.

Die quadrirte Ordinate aber, welche vorzüglich zu merken ist, wird nun $yy = p(xx - aa) : 2a$

Das Auge, das die Linien suchen würde, welche in Construction diesen zusammengesezten Gleichungen correspondiren sollten, würde sehr vergebens suchen. Das Rechtek aus BP und AP, oder $(x + a)(x - a)$, d. h. das 3te Glied der Proport.: $xx - aa$ ist hier $= (2ayy) : p$; wo sich allerdings nur das Rechtek allein sinnlich darstellen lässt; eine Fläche aber, die das Aequivalent dazu wäre, und $2ayy : p$, als Figur, ausdrükte, mit neugierigem Auge aufzusuchen, wäre eine fruchtlose Bemühung. Eben die Beschaffenheit hat es mit dem Werth von yy,

in welchem schon die Factoren im Zähler, p mit (xx — aa) multiplicirt, die angeführte Behauptung bestätigen. Nur in gleichseitigen Hyp. können, wie gedacht, geometr. Constructionen bei allen diesen Gleichungen ungezwungen eintreten.

In wie weit aber doch eine andre Vergleichung zwischen dem Quad. der Ordinate, yy, und einem aus dem Parameter, p, und dem Abscissen Stük, AP, errichteten Rechtek, recht wohl angehe, und auf interessante Zusammenstellungen führe, soll sogleich gezeigt werden.

§. 17.

Man denke sich ein Vierek auf der Ordinate, also yy; und darneben ein Rechtek, aus p und (x — a) errichtet; oder PM^q neben (2PM).(AP) stehend. Das Vierek ist allemal grösser, als das Rechtek. Dieser Saz lässt sich allgemein beweisen, und er ist wichtig, weil selbst der Name der Hyperbel von seiner eingesehenen unumstößlichen Richtigkeit hergeleitet wurde.

Man verweile zuerst bei dem Gedanken: yy hat allerdings ein gewisses noch unaus-

gemachtes Grösenverhältnis gegen $p(x-a)$; und es soll herausgebracht werden: yy sei $> p(x-a)$ in jedem angenommen Hyperbel.

Für yy sezze man sein Aequivalent $p(xx-aa):2a$. Dieses vergleiche man mit $p(x-a)$. Aber anstatt

$$p(xx-aa) : 2a \quad \text{gegen} \quad p.(x-a),$$

schreibe man, wie sehr wohl angeht,

$$\left[p.(x-a).\frac{(x+a)}{2a}\right] \quad \text{gegen} \quad p.(x-a)$$

Was hier linkerhand steht, zwischen [ ], ist gewiß grösser als das zur rechten befindliche Rechtek: $p(x-a)$, wenn nur der Factor $(x+a) : 2a$ ein uneigentlicher Bruch (fragment. spurium) d. i. wenn nur $(x+a)$ grösser, als $2a$ ist. Allerdings aber hat dieses wirklich statt. In allen bisherigen Betrachtungen ist ja die Abscisse, x, grösser, als die Helfte der ersten Axe, a, angenommen. Die Abscisse fängt ja vom Mittelpunkt der Hyperbel, C, an, und erreicht nicht blos den Scheitel der Curve in A, sondern geht auch allemal noch weiter; und sie mag sich nun vor oder hinter dem Brenn-

punkt

punkt endigen, so beträgt ihre Länge doch jederzeit mehr mehr, als nur CA, oder CB; d. i. x ist immerdar grösser, als a; daher auch (x + a) durch (a + a) dividirt, grösser, als 1; d. h. [(x + a) : 2a] ist ein unächter Bruch, welcher, als Factor betrachtet, allemal vergrössert, folglich auch, mit p (x — a) multiplicirt, ein Product geben mus, das grösser, als p (x — a) allein, ist. Demnach ist damit am Tag, daß = p. (x — a) (x + a) : 2a grösser, als p. (x — a) sei. Weil nun das allemal so seyn mus, und die erste Grösse so viel, als yy, beträgt, so ergiebt sich daraus die Evidenz der Behauptung: yy, das Quadrat der Ordinate sei jederzeit in der Hyperbel eine Figur von einer grössern Fläche, als die des Rechteks: p (x — a)

Eben daher aber, weil bei dieser Conoide der Flächenbetrag dieses so oft vorkommenden Quadrats, yy, jederzeit um etwas überschießt, (υπερβαλλει) oder mehr ausmacht, als der Betrag des Rechteks, das sich durch den Parameter und das Abscissenstük AP, oder x — a construiren lässt, kommt der alte griechische Name, υπερβολη, die Hyperbel.

§. 18.

Eine andre Vergleichung des Parameters mit AF, der Abstandslinie des Scheitels vom nächsten Brennpunkt, verdient ebenfalls unsre Aufmerksamkeit. Es lässt sich beweisen, daß diese Abstandslinie AF jederzeit kleiner, als der 4te Theil des Parameters der ersten Axe sei.

Man denke sich AF, als c — a; und 1/4 p als (bb : 2a), oder welches gleichviel ist, als (cc — aa) : 2a. Die Säzze der drei vorherg. Blätter berechtigen ohne Zweifel zu diesen Annahmen. Was behauptet wird, ist also: c — a sei kleiner, als (cc — aa) : 2a. Die lezte Grösse lässt sich zuverlässig auch schreiben:

$= (c - a).[(c + a) : 2a]$.

Nun kommt es wieder blos darauf an, ob der Factor zwischen [ ] ein uneigentlicher Bruch, d. i. grösser, als 1 sei? Er ist es ganz gewiß, weil CF oder c allemal länger, als die halbe Axe, CA, oder a, bisher angenommen worden ist. Demnach ist sicher

$(c - a).(c + a) : 2a$ grösser, als c — a,

oder 1/4 p ist grösser, als AF, daher natürlich,

umge=

umgewendet, die Linie AF allemal kleiner, als der 4te Theil von p seyn mus. Die Länge von AF, viermal genommen, beträgt also niemals so viel, als zwei senkrechte Ordinaten, die in der Hyperbel durch den Brennpunkt gehen.

Wer nun aber nicht zufrieden wäre, blos zu wissen, 4AF sei noch immer kleiner, als p, sondern auch die Verhältnis beeder Grösen, oder den Exponenten AF : p gern kennen möchte, der hätte folgende Erwägungen anzustellen:

An der Proportion

$$aa : 2a = bb : p$$

ist, dem § 16. gemäs, nicht zu zweifeln. Man divid. die zwei ersten Glieder durch a, und schreibe anstatt des dritten das bekannte Aequivalent in 2 Factoren:

$$a : 2 = (c+a).(c-a) : p$$

Das Product der mittlern Glieder bleibt eben dasselbe, und immer ap gleich, wenn man das zweite Glied auch so sezt:

$$a : zu\ 2(c+a) = c-a : zu\ p$$

Da man nun die zwei vordern Glieder auch $(1/2a) : zu\ (c+a)$ ausdrükken kann, so erhellet deutlich, daß AF so vielmal in dem Parameter enthalten sei, als der 4te Theil der grosen Axe in BF, d. i. in $c+a$.

Eine Folge hievon ist, daß ein Rechtek aus 1/2 CA, und dem Parameter errichtet, eine eben so grose Fläche habe, als eines aus BF und AF errichtet. Die Producte der äussern und mittlern Verhältnisglieder geben dieses offenbar.

§. 19.

§. 19.

Von dem Verhalten zweier verschiedenen Ordinaten (unter einem Schenkel der Hyperbel) gegen einander ist bisher noch nichts vorgekommen. Darnach aber zu fragen, dürfte doch leicht jeder einige Versuchung fühlen, der nur die Verhältnisse der Hauptlinien im Kreis (Zirkel) kennt, und weis, daß zwei verschiedene Perpendikel, auf einen Diameter gefällt, und da quadrirt, sich wie die Rechtekke aus den 2 Segmenten verhalten, welche (Segm.) durch die Perpendikel bestimmt werden. Die Frage lässt sich ohne Schwürigkeit beantworten, wenn man folgenden Vorstellungen nachgeht:

Die eine Ordinate in der Hyp. heisse y, wie bisher; ihre Abscisse heisse x. Eine zweite Ordinate heisse Y; ihre zugehörige Abscisse aber X.

Insoferne nun die oben beigebrachte Proportion,

$$aa \text{ zu } bb, \text{ wie } xx - aa \text{ zu } yy$$

allgemein gültig seyn soll, und wirklich ist, müssen auch die Verhältnisse bleiben, und, wie vorher, stehen, wenn man auch die zwei lezte Glieder

$$= XX - aa \ : \ YY$$

sezt. Denn der Abscisse x correspondiret zwar in der Zeichnung der Figur wohl die Linie CP. Aber es ist schon oben bemerkt worden, daß man den Punkt P, wo sie sich endiget, näher am Scheitel und auch entfernter davon denken könne, und daß dennoch die Schlüsse allgemein fest bestehen bleiben, welche bisher mit Beweisen geführt worden sind, und welche sich auf die

die Gesezlichkeit der Abscissen überhaupt beziehen. Man schiebe nur in alle bisher deducirte Formeln X ein, wo x steht, und zugleich Y, wo y steht, und denke dabei diese neue Abscisse und Ordinate um ein paar Zolle oder Linien nach Gefallen länger; Die Gültigkeit der Formeln wird dadurch nichts verlieren; Alle Argumente dabei werden vor wie nachher bleiben; x und y sind ja nur veränderliche Grösen, und bestimmen nur einander selbst. Man kann dafür X und Y schreiben; Die Signaturen irren die Begriffe nicht; das ist doch wohl leicht zu fassen. Also allgemein hat so gut statt:

aa : zu bb = XX — aa : zu YY
als aa : zu bb = xx — aa : zu yy

Nun ist bekannt, daß, so oft sich zwo untereinander gesezte Proportionen von der Art befinden, daß ihre zwei vordern Gliedern ganz gleich sind, aus den 4 übrigen Gliedern sich eine neue Proportion bilden lasse. Darnach mus hier gültig seyn, zu sezzen:

xx — aa : zu XX — aa, wie yy : zu YY

Die zwei ersten Glieder, mit den Differenzen, lassen sich eben so gut auch vorstellen, als

(x + a).(x — a) : zu (X + a).(X — a), wie . . .
und darunter Rechtekke sich denken, wie oben oft genug schon angegeben worden. Sobald man aber hievon überzeugt ist, so sieht man wohl sogleich die Richtigkeit der folgenden Behauptung ein, daß sich nehmlich

„in jeder Hyperbel die Quadrate zweier Or-
„dinaten, wie zwei Rechtekke, welche durch
„die

„die Entfernungslinien derselben (Ordina„ten) von den beeden Scheiteln der Hyper„bel errichtet werden, gegen einander ver„halten.

Man betrachte nur, in Fig. II, von P. aus, die Entfernungslinie, die bis an den nächsten Scheitel A reicht; d. i. AP oder x — a; und alsdenn die zweite, welche von P bis an den andern Scheitel B reicht, d. i. BP, oder x + a. Ein Rechtek, aus diesen beeden Linien errichtet, (BP. AP) gehört zu PM^q oder zu yy

Ebenso correspondiren zwei solche Linie (X — a) und (X + a) gegen Y, und die Rechtekke daraus gegen YY; welches sich einsehen lässt, auch ohne eine besondre Zeichnung dazu zu entwerfen.

Der Exponent der Verhältnis zwischen zwo quadrirten Ordinaten ist, diesem allem nach, durch x, X, und a, gegeben; und hieraus ersichtlich, was sich zu befriedigender Antwort auf die im Eingang erwähnte Frage versezzen lasse.

Fig: IV.

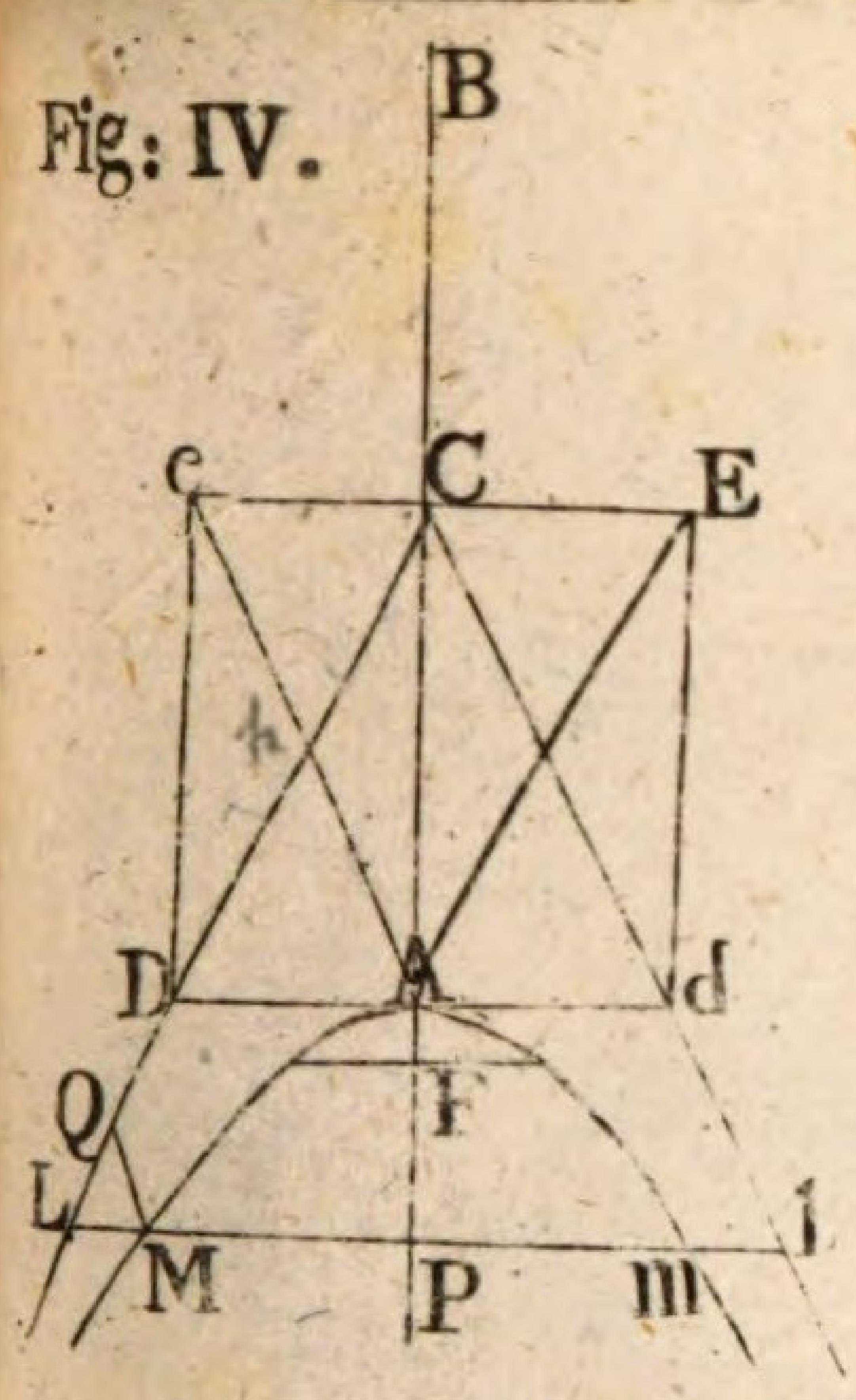

Fig: V.

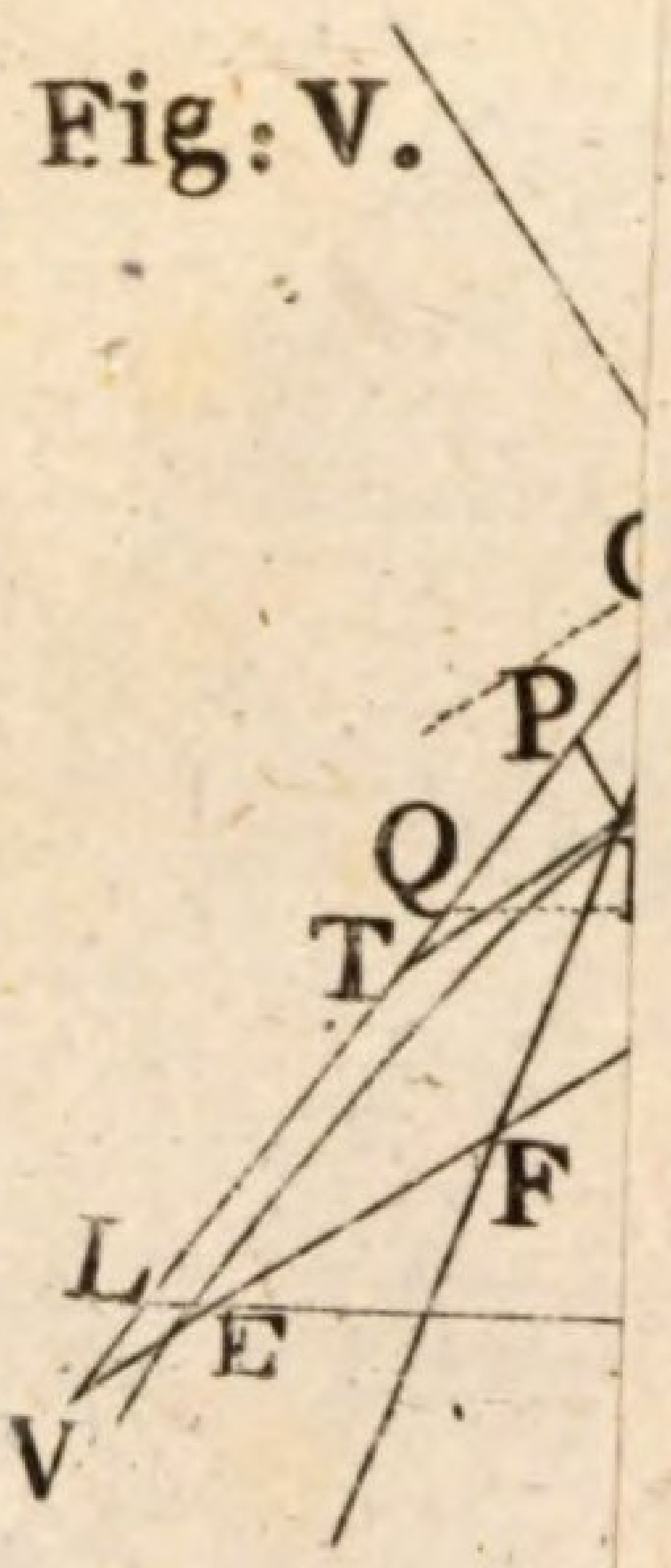

Fig: VI.

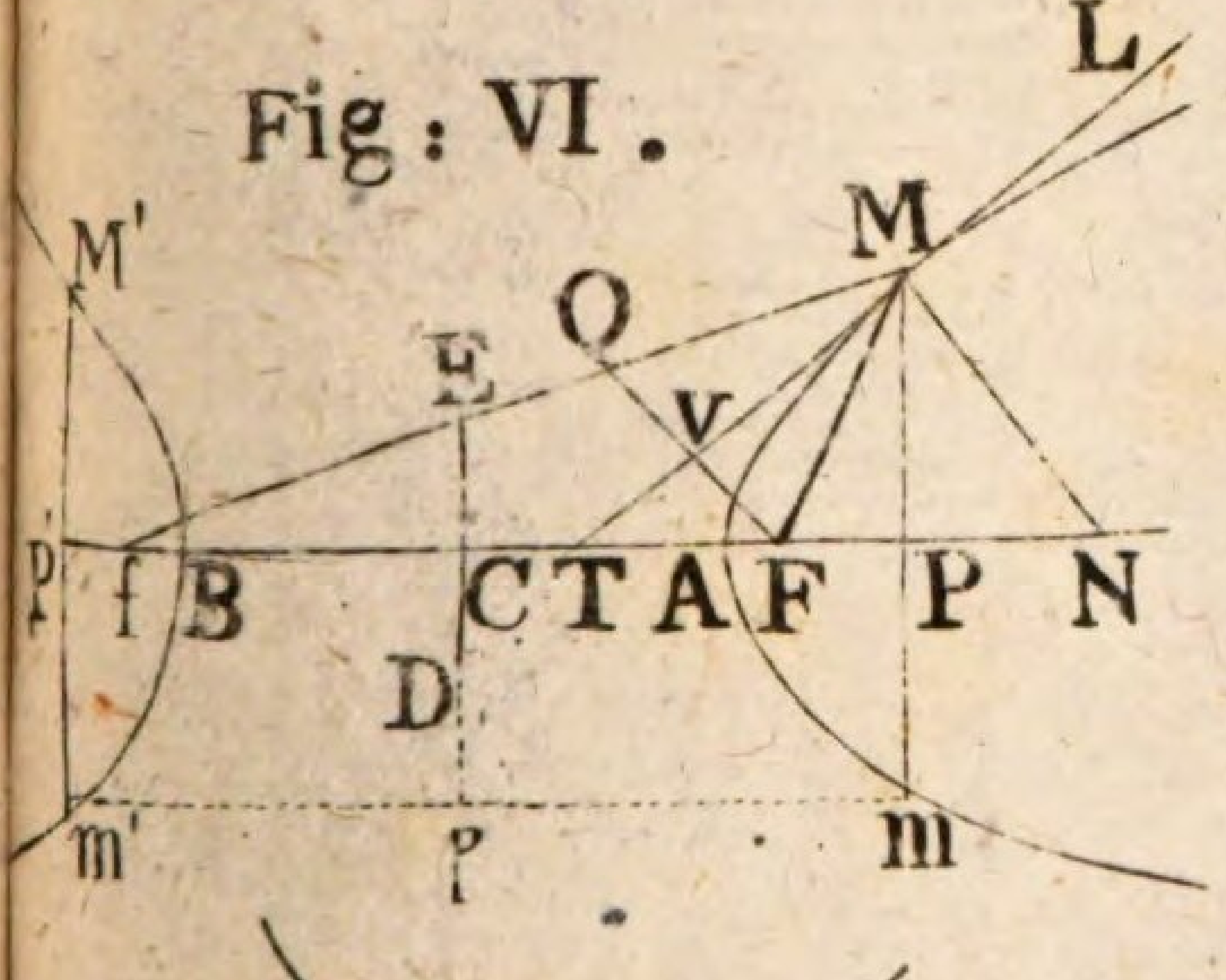

Fig: V

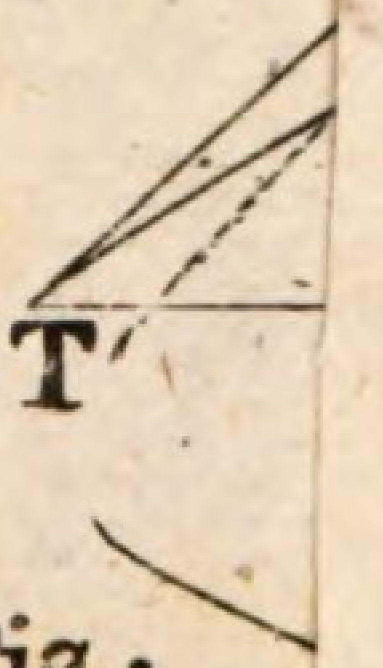

Fig: VIII.

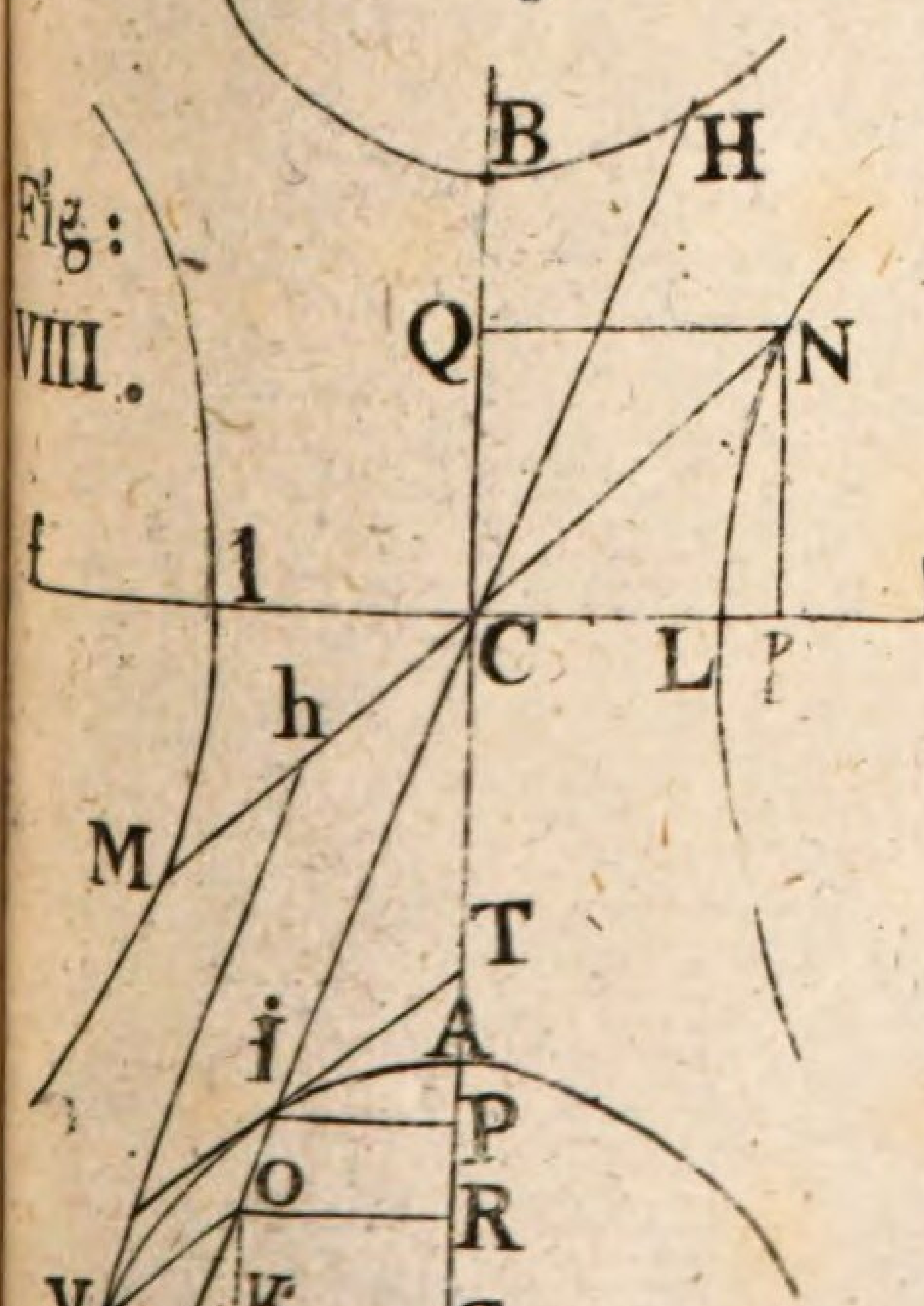

Fig: IX.

Beleuchtungen
der
interessanten Unterhaltung,
welche die
Conoide der Hyperbel
gewährt.

Von
C. L. Schübler

Zweites Heft
mit einer Kupferplatte.

Variare methodos, ad perfectionem
Scientiae pertinet.

Leibnitz.

Mannheim,
bei Schwan und Götz 1792.

Vorrede.

Liebhaber der Mathematik übersehen nun aus diesem zweiten Heft den Umfang meines Werkchens. Ich habe blos darinn Analysis endlicher Grösen angewendet, um mein Süjet zu beleuchten. Analysis des Unendlichen war ganz von mir vermieden. In einer abgesonderten Abhandlung werde ich zu andrer Zeit zeigen, was durch sie sich bei dieser Conoide weiter ins Licht sezzen lasse. Meine gegenwärtigen Lucubrationen machen, so wie sie jezt vorliegen, wie ich denke, ein gewisses Ganze aus, das für sich, ohne Einmischung des Differential-Calküls, bestehet.

Vorrede.

Dilettanten in Mathem. werden meine IIIte und Vte Lucubr. beinahe, als einen Commentar über §. 389 — bis §. 414. der Kästnerischen Analys. endl. Gr. benüzzen können; und die VIte ebenso über die lezte Blätter von Hrn. Prof. Trentels Compend. Section. Conic. (einem wenig bekannten, aber gewiß sehr schäzbaren Werkchen.) Daß ich übrigens nirgends schlechthin copirt, sondern vielmehr öfters selbst ausersonnene Beweise geliefert habe, darüber wird mich unbefangene Vergleichung, wie ich hoffe, rechtfertigen.

Drit-

Dritte Lucubration.

Ueber die Abscissen, welche vom Scheitel der Hyperbel, und bejaht oder verneint genommen werden.

§. 20.

Beim Kreis, bei der Parabel, und bei der Ellipse kommen Abscissen vor, welche von einem Punkt der Curve beginnen, von da auslaufen, oder, wie der eingeführte Ausdruk ist, von da an genommen werden. So liegt dann doch der Gedanke ziemlich nahe, bei der Hyperbel dürften ebenfalls solche Abscissen statt haben. Sie haben wirklich statt, wie

 schon

schon oben in §. 11. vorläufig angezeigt worden; und ihre Betrachtung soll uns gegenwärtig beschäftigen.

Die Linie vom Scheitel der Hyperbel, A, bis an P, das Ende der Ordinate PM, heißt eine Absciße vom Scheitel. (Fig. II.) In den vorigen Blättern hat uns diese Absciße x — a geheissen; von jezt an soll sie uns x allein heissen. In den vorigen Blättern war die Absciße allemal grösser, als die Helfte der ersten Axe; und AP nur ein Abscißen-Stük, das um die ganze Länge der Halbaxe, a, kürzer, als CP (oder als x) war; von jezt an soll und mus die Absciße nicht schlechterdings, länger, als diese Halbaxe seyn; in unsrer Zeichnung aber ist sie selbst kürzer, und also weil AP kürzer, als AC ist, mus auch x eine kleinere Gröse als a, gelten.

Was vorher, so lange die Abscißen vom Mittelpunkt der Hyp. genommen worden, x + a geheissen, die Linie BP, mus jezt (2a + x) heissen, weil die zwo Linien BA, und AP, addirt, eben BP ausmachen, und BA, vorher wie jezt, 2a, in beständiger Geltung bleibt, AP aber nun x gilt.

Das

Das Rechtek, auf welches unsre Aufmerksamkeit so oft schon bisher gerichtet gewesen, BP . AP, heißt daher forthin nicht mehr $(x+a).(x-a)$, sondern

$$(2a+x).x, \text{ oder } (xx+2ax)$$

Das Auge erhält also hiedurch ganz andre Formeln für eben dieselben Linien und Flächen, welche oben mehrmals vorgekommen sind *).

*) Das Rechtek BP . AP hat jezt, wie gedacht das Aequivalent $xx + 2ax$. Wer nur einigermasen mit der Gestalt eines ins Quadrat erhobenen Binomiums in Buchstabenrechnung bekannt ist, wird hier sogleich wahrnehmen, daß diesem Ausdruk blos $+ aa$ hinzuzudenken sei, um ein vollkommnes Quadrat vor sich zu sehen. Denn

$xx + 2ax + aa$ wäre rein soviel, als $(x+a)^2$.

Folglich $xx + 2ax$ mus soviel, als $(x+a)^2 - aa$ ausmachen. Jezt blikke man in die Figur II. Was uns gegenwärtig $x+a$ heißt, ist in derselben $AP+AC$ oder CP. Ein Quadrat, auf dieser Linie CP errichtet ist, ist nun mit dem Rechtek, BP.AP, verglichen, in der Verhältnis, wie

$(x+a)^2$ zu $(x+a)^2 - aa$

und also um das Quadrat der ersten Halbaxe, aa, grösser

Auch die Gleichungen für die Ordinaten und Parameter müssen durch diese Umänderung ein ganz anderes Ansehn erhalten; dies lässt sich leicht schliessen, auch ehe man noch die Operationen selbst vornimmt, wodurch diese neue Gleichungen ans Licht gebracht werden, weil in diesen Gleichungen oder in den ausgeführten Aequivalenten von y und p, wie wir schon lange wissen, die Abscissengrösse x vorkommt, und jezt doch allemal x + a zu sezzen erforderlich ist, um das x der vorigen Blätter, (die Länge der Abscisse vom Mittelpunkt der Hyp. aus,) gehörig auszudrükken.

„Das ist eine trokne und unfruchtbare Beschäftigung, oder eine leere Spielerei!“ (dachte ich ehedem, als ich znm erstenmal die Theorie der Hyperbel zu meiner Privatvergnügung studirte)

grösser als das bemerkte Rechtek. Eben so war es vorher, da nehmlich das Quadrat von CP uns xx geheissen, und das Rechtek bekanntlich als die Differenzgrösse xx — aa erwiesen worden. Die Flächen bleiben, und ihre Verhältnisse gegeneinander bleiben auch; die geänderte Formeln müssen nach angestellter Analysis daher allemal eine ähnliche Probe zur Befriedigung des Beobachters aushalten.

studirte) „überall, wo vorher x vorgekommen,
„x + a einzuschieben; und durch diese Sub=
„stitution, wer weis, wie viele neue Formeln
„zu schmieden! Was kann dabei herauskom=
„men? Was kann dadurch dem Verstand für
„Nahrung geschaft? oder wie könnte man da=
„durch fähig gemacht werden, die Natur der
„Hyperbel näher kennen zu lernen?" — —;
Die nächstfolgende Betrachtungen werden zeigen, daß es voreilig sei, die Annahme des neuen Ausdruks der Abscisse, AP, für so gering fügig zu erklären, und daß er allerdings auf Wahrheiten und Schlüsse von nicht verächtlicher Bedeutung führe.

§. 21.

Man denke sich die erste Axe von A nach B hingenommen, und den Act der Zeichnung, wie diese Linie so von der Rechten gegen die linke Hand zugezogen wird. Und alsdenn denke man sich die Abscisse von A nach P, oder auch weiter hinaus, von der linken gegen die rechte Hand gezeichnet. So sind da zwei entgegengesezte Actus, und zwei entgegengesezte Linien; eine ausserhalb der Curve der Hy-

perbel, eine innerhalb der Curve. Nun stelle man sich beede gleichlang, aber (wie gedacht) conträr gezeichnet vor; so wird die eine bejaht, die andre verneint zu nehmen seyn. Hieße also die eine, (die innre) zum Beispiel +n; so wird die andre, die äussre, —n heissen; hiesse die erste +x; so wird die andre —x heissen. In unsrer Figur wäre +AP und —AP zu betrachten; das leztre, verneinte AP, ist offenbar in der Figur nicht markirt; es wäre aber allerdings ein gewisses Stük der ersten oder grossen Axe. Nun stelle man sich eine grössre bejahte Abscisse vor, als das bejahte AP ist, und dieses heisse noch immer +x, (welches gar wohl angeht, weil x als eine veränderliche Gröse, doch gewis länger und kürzer, angenommen werden darf) so mag ohne Widerspruch dieses bejahte x innerhalb der Curve gerade von der Länge der ersten Axe gar wohl gedacht (supponirt) werden. Alsdenn aber kann allerdings diese erste Axe auch als —x betrachtet werden, wenn man ihre Linie conträr gezeichnet ansieht.

Erwägt man dieses, so läßt sich einsehen, wie sich die erste Axe mit dem Namen einer

ver-

verneinten Abscisse belegen lasse, und was $-x = +2a$; und umgewendet $+x = -2a$ für eine Bedeutung haben können. Gebrauch hievon wird auf folgende Weise gemacht:

Man denke sich kleinere und immer kleinere Ordinaten, PM, oder y, immer näher und näher am Scheitel; so werden die Abscissen, wie AP eine ist, ebenfalls immer kleiner werden; und wenn die Ordinate gar zu o wird, so wird die Abscisse ebenfalls zu o werden; oder, wenn die Ordinate verschwindet; so verschwindet die Abscisse zugleich; kurz für $y = o$ ist auch das bejahte $x = o$. Das ist ganz richtig. Aber nicht blos bei $x = o$ ist $y = o$; sondern auch bei $x = -2a$. Wenigstens kann man die Möglichkeit behaupten: bei $y = o$ sei x entweder als o, oder als $-2a$ zu denken. Hievon wird man überzeugt, wenn man erwägt, daß in der Proportion

$$2a : p = xx + 2ax : yy$$

die Ordinate y sehr klein, und auch endlich bis zu o verschwunden, demnach eben diese Proportions-Formel, als

$$2a : p = (xx + 2ax) : o$$ gedacht werden könne.

Stellt man hier das Product der äussern Glieder gegen das Product der mittlern, so hat die Gleichung statt:

$$(2a).0. = p.(xx + 2ax) \text{ oder } = 0$$

Ohne Nonsens sind blos zwei Fälle anzunehmen, in welchen diese Gleichung gelten kann; nehmlich p. (xx + 2ax) kann Null seyn,

erstens, wenn x soviel als o gilt; wo gewiß die Gröse zwischen den Klammern zu Zero wird;

zweitens, wenn x soviel, als —2a gilt; denn da wird zwischen den Klammern durch Substitution einzurükken seyn: (4.aa — 4.aa) welches abermals soviel, als Zero, ist.

Hieraus erhellet, in wie ferne man bei y = o in Absicht auf die Abscissen zweierlei denken könne, und wie die Analysis selbst auf die zwei Scheitel der entgegengesezten Hyperbel-Curven führe, von welchen der eine nehmlich am Ende der bejahten Abscisse liegt, der andre am Ende der verneinten.

§. 22.

Nimmt man die Länge der verneinten Abscisse kleiner als die der ersten Axe an, und fragt

fragt dabei: Welche Ordinate nun wohl dieser Abscisse zugehöre? so führt eine kurze Analysis auf einen Widerspruch, welcher Anfänger gewöhnlich sehr befremdet. Nehmlich, anstatt $-x = 2a$ gelten zu lassen, nehme man nur einmal $-x = a$ an; also umgewendet auch $+x = -a$; diesen Werth sezze man in die oft angeführte Hauptproportion ein, und sehe, wie alsdenn des 4ten Gliedes Aequivalent heissen werde? Das dritte Glied wird aus $xx + 2ax$ jezt $(-a.-a) + 2a.(-a)$ das ist $+ aa - 2aa$ welches offenbar eine negative Gröse, schlechthin so viel, als $-aa$, andeutet. Aus der Proportion

$$2a : p = -aa : yy$$

folgte also das Aequivalent des vierten Gliedes sei nunmehr: $-aap : 2a$ oder $-a.(1/2p)$ sei $= yy$; und daher die Ordinate, unquadrirt, $y = \sqrt{-[ap:2]}$. Aber die Quadr. Wurzel aus einer verneinten Gröse auszuziehen, ist unmöglich. Folglich führet die Annahme, welche eine verneinte Abscisse nur so gros, als die Helfte der ersten Axe sezt, auf etwas imaginäres und auf einen innern Widerspruch,

das heißt hier: auf eine Ordinate, die der Natur der Hyp. gar zuwider ist.

Und darauf kommt man allemal hinaus, so oft man —x kleiner, als 2a, annimmt, wie nun jeder selbst versuchen kann, wenn er die verneinte Abscisse, als 1/2a, oder, als 2/3a u. s. f. zum Versuch gelten lassen will. Die Ordinate, welche einer solchen Abscisse zugehörte, käme als Perpendikel, auf die erste Axe zwischen die zwei Scheitel der zwei Curven zu stehen; und auf dieser Axe, von A bis B, haben demnach, der erstangeführten Gleichung gemäs, gar keine Ordinaten bei der Hyperbel statt. Die Natur der Hyperbel erträgt es nicht, ausserhalb ihrer Curven solche Ordinaten zu denken; sie liegen nur innerhalb derselben; und da können sie allerdings bis ins unendliche fortlaufen, weil man sich auch die Abscissen unendlich verlängert denken kann. Auch hierauf führt die Analysis:

Wenn man nehmlich die verneinte Abscisse grösser, als 2a, annimmt, so erhält man wiederum Gleichungen für yy ganz ohne Widerspruch. Z. B. —x sei so gros, als 3a; also +x = —3a. Diesen Werth sezze man in

das

das dritte Glied der Proportion, in $xx + 2ax$, ein, so erhält man für dasselbe

$+ 3.aa + [(2a)(-3a)]$ d. h. $9aa - 6aa$; welches eine bejahte Grösse ist, aus der $yy = (3ap : 2)$ folgt; deren Qu. W. also ebenfalls bejaht ist. Da ist also nichts imaginäres weiter vorhanden; und dergleichen kann auch nichts weiter vorhanden seyn, weil diese Ordinaten allerdings existiren, und von dem Scheitel der Curve B, (in der Fig. II. zur linken) wieder beginnen, und von da fortgehen bis P'M', und von da weiterhin, so lange die Abscissen nur linkshin verlängert werden mögen.

Hiermit harmonirt auch vollkommen das Aequivalent, welches x zugehört, wenn man dasselbe aus der Prop. $2a : p = xx + 2ax : yy$, selbst durch Auflösung der vorhandenen unreinen quadratischen Gleichung sucht. Man erhält nehmlich

$$x = -a \pm \sqrt{[(2ayy + aap) : p]}$$

wo das Zeichen der Ambiguität offenbar darlegt, daß die Abscisse x nicht schlechthin nur auf eine Seite hinzunehmen, sondern daß sie

in

in zweierlei entgegengesezten Richtungen gedenkbar sei. Wir kennen diese zwo Richtungen nunmehr bereits hinlänglich.

§. 23.

Die erstgedachte zwo Richtungen haben überhaupt, also auch insbesondre gegen die zween Brennpunkte, und bestimmt bis an dieselbe hin, statt. Als eine veränderliche Gröse kann das bejahte x daher auch die Linie AF, und das verneinte x die viel grösere Linie, Af, bedeuten. Wenn man dieses in Gedanken annimmt, und sich erinnert, daß die dieser Abscisse zugehörige Ordinate nichts anders, als der halbe Parameter der ersten Axe sei, (nach §. 14.) daher y jezt = 1/2p gelten müsse, so wird begreiflich, daß für die allgemeine Gleichung

$$yy = p.(xx + 2ax) : 2a \text{ auch } = 1/4.pp$$

in diesem Fall eintreten müssen. Der Ausdruk, yy, kann nun ganz weggelassen, und blos die zulezt signirte Gleichung betrachtet werden. Aus ihr giebt sich leicht

$$(xx + 2ax) \text{ allein } = (1/4p)(2a) \text{ oder } 1/2ap.$$

Und nunmehr ist blos eine unreine Qu. Gleichung

chung wieder aufzulösen, um x allein zu erhalten; und zwar in dem Ausdruk:

$$x = -a \pm \sqrt{(aa + 1/2ap)}$$

wo man, wenn unter x die Linie AF verstanden seyn soll, die Gröse unter dem Wurzelzeichen, bejaht, (mit +), und wenn die Linie Af gelten soll, eben diese Gröse verneint zu denken hat; oder auch

$$-x = +a + \sqrt{(aa + 1/2ap)}$$

wo die zwo positive Grösen die Länge der Linie Af angeben; und zugleich erhellet, daß die Längengröse unter dem Wurzelzeichen soviel, als Cf in der Fig. II. ausmache, weil Af = AC + Cf ist, und AC eben die erste positive Gröse, +a, oder die Helfte der ersten Axe bedeutet.

Diese Betrachtungen zeugen, daß auch die Analysis auf zwei Brennpunkte in der Hyperpel führe, und demnach mit dem, was die Zeichnung lehrt, zu vollkommener Genüge harmonire.

Beiläufig mag auch hier noch angemerkt werden, daß wir, ohne darauf auszugehen, bei dieser Erörterung auch wieder auf den Saz

gekom=

gekommen sind, welchen bereits §. 18. am Schluß enthält, daß nehmlich die Rechtekke

(BF . AF) und (1/2CA . param.)

gleich seien. Denn BF . AF ist jezt = (xx + 2ax) wie aus Vergleichung des §. 20. erhellet; (wo BP . AP angegeben worden, weil dort die Abscissen bis P giengen, welche jezt nur bis F angenommen werden). Das zweite Rechtek aber, mit 1/2CA und dem Parameter errichtet, ist nichts anders, als 1/2ap; und wir haben uns auf der vorigen Seite von der Gleichung überzeugt: (xx + 2ax) sei = 1/2ap. Ein aufmerksamer Blik in die Figur zeigt, daß hier gar nichts anders, als was oben in §. 18. dargelegt worden, gemeint seyn könne. Der bestimmte Name für die Abscisse vom Mittelpunkt bis an die Brennpunkte genommen, mit c, wird in diesen Betrachtungen von §. 20. bis §. 23. wo die Abscissen nur vom Scheitel der Hyperbel genommen werden, ganz beiseite gesezt.

Vier-

Vierte Lucubration.

Ueber die Hyperbel in Beziehung auf ihre Asymptoten

§. 24.

Man errichte mit den zwo Halbaxen ein Rechtek = Ce . CA in der Fig. IV; zeichne in dasselbe von dem Mittelpunkt der Hyperbel aus eine Diagonale CD; verlängere diese Linie bis Q, bis L, und weiter fort, so lange man will. Sie wird der Curve der Hyperbel immer näher kommen, aber sie wird sie niemals vollkommen erreichen, noch schneiden. Daher heißt diese gerade so gezeichnete Linie eine Asymptote der Hyperbel.

Wenn man die nehmliche Zeichnung auf der andern Seite der zweiten Axe vornimmt,

so

so ist der Erfolg eben derselbe; und man erhält die andre Asymptote, als die Verlängerung der Diagonale Cd in diesem andern Rechtek, von d bis l fortgezogen, und so weit man will, verlängert.

Die zwo Asymptotenlinien kommen in dem Mittelpunkt der Hyperbel C zusammen, oder gehen von da aus, wie man die Betrachtung nehmen will. Sie formiren also in C allemal einen Winkel, welcher der Asymptoten-Winkel heißt; und von welchem in den folg. Blättern mehr vorkommen wird. Jezt liege uns zuförderst die Ausführung des Beweises an, daß die so gezeichneten Asymptoten würklich die Curven der Hyperbel niemals erreichen, noch weniger durchkreuzen können.

§. 25.

Man zeichne von einem willkührlichen Punkt in der einen Asymptote bis an einen Punkt in der andern eine gerade mit den zwoten Axe paralele Linie, Ll. Ihre Helfte ist LP, und heisse z. Sie besteht aus der Ordinate MP, und aus LM; jene liegt innerhalb der Curve, LM aber

aber ausserhalb derselben, und offenbar ist synthetisch

LP oder z = y + LM

zu benennen, wenn die Ordinate MP auch hier, wie gewöhnlich, y heißt. Aus dieser Gleichung mus notwendig die für LM = z — y gültig folgen; und LM soll auch in Zukunft blos durch diese Differenz ausgedrükt werden. Man merke sich den Ausdruk derselben, wie auch den verwandten

z + y = (Pl + PM) d. i. Ml, oder Lm.

Ein Blik in die Figur IV. überzeugt wol jeden von der Richtigkeit dieser beeden Signaturen. Man gelangt vermittelst derselben zu einem neuen Ausdruk für die zwote Axe, und hiedurch zu dem Beweis des Hauptthema selbst. Der Weg hiezu ist folgender:

Die Figur zeigt, daß CLP und CDA ähnliche rechtwinkl. Dreiekke seien; und daß die Katheten AC und AD sich, wie CP zu LP gegen einander verhalten; d. h. a zu b = wie x zu z, wenn die Abscissen, vom Mittelpunkt genommen, wieder x heissen. Die Proportion lässt sich auch so schreiben

a : b = x : (bx : a) statt = x : z

Daher das Quadrat von LP, oder

$zz = (bbxx : aa)$ seyn wird. Dieser lezte Ausdruk kommt aber in der bekannten Hauptordinatengleichung für die Hyp. selbst vor, wenn man nehmlich statt

$yy = [bb(xx-aa) : aa]$ schreibt $[(bbxx : aa)-bb]$ welches offenbar gleichgeltend ist, aber hier vorzüglich wird, weil sich damit die Substitution $yy = zz - bb$ augenscheinlich rechtfertiget, welche weiter die gedachte neue Gleichung zu der 2ten Axe veranlasst, weil aus

$zz - yy = bb$; kommt $2\sqrt{(zz-yy)} = 2b$.

Man stelle sich die Differenzgröse $zz - yy$ in zween Factoren vor, als $(z+y).(z-y)$. Dieses Product ist natürlich ebenfalls $= bb$; aber diese Signatur gewährt den Vortheil, daß man dadurch auf die Zeichnung zurükgeführt wird, und zu der Einsicht gelangt: Das Quadrat der Halbaxe, bb, müsse einem Rechtek, aus $z+y$ und $z-y$ errichtet, gleich seyn, oder

Ml.LM sei $= Ce^2$; auch $= DA^2$ oder bb.

Diese Entdekkung überrascht auf eine angenehme Art, und ist sehr fruchtbar an Folgen. Die nächste ist die Proportion,

$z + y$: zu b = wie b : zu $z - y$
woraus sich der Saz in Worten ergiebt: „Die Helfte der zwoten Axe sei die geom. Mittelproportionale zwischen Ml und LM; der Beweis unsers Thema selbst aber sich zunächst folgern lässt. Denn wir sollen darthun, die Asymptoten fallen nie mit der Curve ganz zusammen, d. i. LM oder $z - y$ werde niemals Null, oder der Unterschied zwischen LP und der Ordinate MP höre nie ganz auf, wenn man auch die Abscissen noch so weit (jedoch immer auf endliche noch bestimmbare Weiten hinaus) verlängert, und damit LP, so weit man will, vom Scheitel entfernt denkt. Kleiner und immer kleiner wird natürlich LM, oder $z - y$, je mehr diese Entfernung zunimmt, d. h. so wie Ml oder $z + y$ wächßt; welches ein Blik in die Proportion $z + y : b = b : z - y$ auch schon entdekt; wo das lezte Glied notwendig kleiner wird, je grösser das erste ist. Verschwinden aber kann es nicht, ohne daß die zwote Axe selbst verschwände, und also gar keine Hyperbel mehr vorhanden wäre. Denn, $z - y = 0$ gesezt, führte notwendig auf $bb = 0$ da das Product der äussern Gliedern

in diesem Fall o würde. Auch, ohne die Proportion zu Hülfe zu rufen, kann schon die Betrachtung, daß beim Zusammentreffen der Asymptote mit der Curve, die Ordinate so gros als LP selbst, angenommen, folglich $y = z$ gedacht werden müßte, und daher das erwiesene Haupt-Aequivalent $zz - yy = bb$ zu $yy - yy$ d. h. ganz zu o würde, die Ueberzeugung hervorzubringen, daß die Curve die Asymptote nie erreichen, oder diese an jene nie stosen könne, weil man sonst auf eine Hyperbel käme, die gar keine zwote Axe hätte; welches ein offenbares Absurdum wäre, auf das keine evident-erwiesene algebraische Gleichung jemals führen darf.

Man kann auch die Erwägung noch anstellen, daß aus der Proportion
$z - y = [bb:(z + y)]$ folge, und daß so lange dieser Quotient Grösen enthalte, die sich nicht aufheben, auch $z - y$ nicht zu Zero werden könne.

Die Unvollkommenheit menschlicher Werkzeuge beim Zeichnen, das Zusammenschleifen der Linien bei fortgesezter Verlängerung der Asymptote, das Verschwinden der Linie LM

für

für das suchende Auge — — entscheiden hiebei gar nichts; grose Näherung darf nie mit gänzlicher Vereinigung verwechselt werden, so lange man mit endlichen Grösen, und nennbaren Weiten umgeht; und der kurze von den Griechischen Geometern gewählte Ausdruk: Asymptote bleibt daher für alle Zeiten (für die Linie CL und deren Verlängerung) gerechtfertiget. Die Curve der Hyp. naht sich der Asymptote immer mehr und mehr, erreicht sie aber nie.

§. 26.

Die Asymptoten veranlassen neue Coordinaten, andre als die an der ersten Axe, welche uns seit §. 12. beschäftigt haben; und auch eine neue Hauptgleichung für die Hyperbel.

Man ziehe eine kleine Linie von der einen (schon gezeichneten) Asymptote an die Curve, mit der andern Asymt. Linie gleichlaufend; in Fig. IV. heißt sie MQ; und ist auch Ah gleichlaufend. Damit sieht das Auge drei ähnliche Dreiekke vor sich QLM, CLl, und CDd. Die homologe Seiten in ihnen geben die Verhältnisse:

CL : zu Ll = wie Ql : LM = wie CD : zu Dd

Wenige Betrachtungen über die Verhältnisse dieser Linien führen zu dem interessanten Schluß, daß ein Rechtek aus CQ und MQ errichtet, gerade viermal kleiner sei, als die Quadrate der Halbaxen zusammen genommen, oder 4. [CQ . MQ] sei = aa + bb. Der Beweis hievon wird so geführt.

(I) Man schreibe die im Eingang erwähnte erste Proportion so:

CL : zu QL = wie Ll : zu LM

und denke die Grösen im 1sten und 3ten Glied synthetisch, der Figur gemäs, so daß stehe

QL + QC : zu QL = wie Ml + LM : zu LM

(II) Man ziehe das 2te Glied vom ersten, und das 4te vom dritten ab, so wird doch noch die Proportion bestehen

CQ : zu QL = wie Ml : zu LM

Die Gültigkeit dieses Verfarens ist längst erwiesen, worüber man die Wolfischen und Kästnerische Lehrbücher nachsehen kan (des lezt. Arithm. Cap. V. nr. 34.)

(III) In der lezten Proportion verwechsle man die mittlern Glieder, so werden sich die Verhältnisse fortsezzen lassen:

CQ : Ml = QL : LM = CD : Dd .

Die

Die 4 lezte Glieder sind bereits im Eingang, wie sie hier stehen, aufgeführt worden; auch rechtfertigt sie ein Blik in das Dreiek CDL. Die zwei ersten ergeben sich algebraisch.

(IV) Man ordne umgewendet zusammen, was gewiß leicht angeht:

Dd : zu DC = wie Ml : zu CQ

und sezze für die drei erste Glieder die nächststehende gleichgeltende Ausdrükke, welche die Figur selbst lehrt:

2b : zu $\sqrt{(aa + bb)}$ = wie (z + y) : zu CQ

so erhellet damit sogleich, daß sich CQ durch z, durch y, und die 2 Axen ausdrükken lasse.

Eben dieses suche man für MQ gleichförmig zu erhalten. Der Weg dazu ist kurz:

(V) Die Figur giebt klar:

Dd : DC = Ll : CL = LM : MQ.

Denn LM ist doch gewiß Basis, wie Ll, und Dd. Nun verweile man blos bei den zwei äussern Verhältnissen;

Dd : zu DC = wie LM : zu MQ

schreibe aber dafür die Aequivalente

2b : zu $\sqrt{(aa + bb)}$ = wie [bb : (z + y)] : zu MQ

So ist klar, daß der Forderung, auch MQ durch z, y, a und b auszudrükken, ein Genüge gethan sei.

(VI) Endlich multipl. man die 2 algebraisch signirte Proportionen Glied für Glied mit einander; so erhält man

4bb : (aa $+$ bb) = wie bb : (CQ.MQ)

weil sich in den dritten Gliedern (z $+$ y) hebt. Notwendig kommt damit für (CQ.MQ) das einfache Aequivalent $\frac{aa + bb}{4}$ heraus; und damit erhellet eben, daß die Quadrate der Halbaxen, summirt, viermal so gros seyen, als die Fläche eines Rechteks, aus CQ und MQ errichtet.

§. 27.

In der Figur ist die entgegengesezte Hyperbel nicht beigezeichnet; man denke sich dieselbe hinzu; so wird man notwendig darauf geführt, zwei Asymptoten auch für sie anzunehmen, so daß also der *ganzen* Hyperbel 4 Asymptoten zukommen, welche leicht begreiflich vier Rechtekke, jedes (CQ.MQ) veranlassen. Diese vier Flächen gleicher Rechtekke sind demnach erst der Summe (aa $+$ bb) allemal gleich.

Da der Beweis *allgemein* geführt ist, so wird einleuchtend seyn, daß MQ nicht gerade da, wo die Figur angiebt, gezeichnet seyn müsse,

müsse, sondern daß es weiter oben oder weiter unten liegen könne. Liegt aber die Linie MQ weiter oben, so ist sie länger; CQ dagegen kürzer; und MQ kann wachsen bis Ah, CQ aber abnehmen bis Ch. Liegt MQ unter der Stelle der Figur, so ist es kleiner, und dagegen CQ eine längere Linie der Asymptote. CQ und MQ sind daher offenbar veränderliche Grösen, und bestimmen einander wechselseitig; eine ist daher als eine Function der andern anzusehen; dadurch gelangt man auf die Vorstellung von Coordinaten. Diese sind von denen, welche uns in allen vorigen Blättern unterhalten haben, darinn verschieden, (1) daß sie nicht mit einander wachsen wie x und y, die Coordinaten an der grosen Axe (2) daß sie keine rechte Winkel mit einander machen, wie die an der Axe. Aber sie bebestimmen doch einander, so wie sie sich ändern; und sind von einander abhängig; haben also den Hauptcharakter der Abscissen und Ordinaten. Die Orthogoneneigenschaft aber ist auch gar nicht an den Begriff der Abscissen und Ordinaten gebunden. Blos des leichtern Vortrags wegen werden gewöhnlich in der Lehre

der Conriden die Ordinaten auf den Abscissen senkrecht, (zu 90 Grad construirt) angenommen. Ohne die mindeste Bedenklichkeit können aber auch Linien, welche einander unter spizzigen Winkeln schneiden, insoferne man eine gewisse wachsende oder abnehmende Reihe derselben denkt, einander in ihren Grösen bestimmen, so daß bei dem Daseyn der einen nur eine gewisse andre vorhanden seyn, ihr coordinirt seyn kann.

§. 28.

Man rükke mit zwo Linien, wie CQ und MQ sind, immer näher an den Scheitel der Hyperbel, so wird CQ nach und nach zu Ch, MQ noch und zu Ah; Bis dahin ist immer die Asymptotenlinie kleiner, als ihre Coordinate; Aber da hört die Ungleichheit auf; Ch erhält die Länge von Ah. Aus

CQ . MQ = Ch . Ah wird daher $(Ah)^2$ auch so viel, als 1/4 (aa + bb). Da erscheint also ein Quadrat, als das Aequivalent des Viertels der quadrirten Halbaxen. Dieses Quadrat heißt

die Potenz der Hyperbel

Ein

Ein Blik in die Figur überzeugt, daß ein Vierek auf der halben Diagonale, die in dem Rechtek der Halbaxen (a . b) sich befindet, aufgerichtet, allemal die Fläche dieses Quadrats gebe; und eine geringe Aufmerksamkeit führt wohl jeden darauf, daß es ganz füglich angehe, die einzelne Gleichung einer solchen Linie, wie Ah ist, schon für sich blos aus dem pythagorischen Lehrsaz, zu beweisen, auch ehe noch die Gleichung zu (CQ. MQ) mit Beweis deducirt wäre. Aber ich habe geflissentlich den allgemeinen Saz vorher darthun wollen, damit einleuchtend werden möchte, daß

$$(Ah)^2 = 1/4\,(aa + bb)$$

nur ein einzelner Fall sei, der unter die auf dem vorigen Blatt bewiesene Formel gehöre; und also für sich gar keiner besondern geometr. Construction, noch der Zeichnung von Hülfslinien bedürfe, um mit Ueberzeugung angenommen zu werden.

Die Summe der Halbaxen-Quadrate ist demnach viermal so gros, als die Potenz der Hyperbel; $(aa + bb) = 4.(Ah)^2$ oder so groß, als $(2Ah)^2$ d. i. so gros als das Quadrat der Diagonale oder Hypotenuse, Ae; und die

Summe

Summe der Quadrate von den ganzen Axen ist 16mal so gros, als diese Potenz der Hyperbel: $(4aa + 4bb) = 16.(Ah)^2$; oder so gros, als $4.(Ae)^2$

§. 29.

Man sezze die Gleichung CQ. MQ = Ah^2 in einer Proportion aus, so wird sie heissen:

MQ zu Ah = wie Ah zu CQ

und auf den Saz leiten, daß die Seite des Quadrats, welches die Potenz der Hyperbel genannt wird, die geom. Mittelproportionale zwischen den 2 Seiten des Rechteks von den Coordinaten an der Asymptote sei. Hierauf wird man nun ferner darauf geführt, Punkte in oder für die Curve der Hyperbel zu finden, so viel man will, oder dieselbe zu prüfen, wenn die Curve schon gezeichnet ist. Man hat hiebei MQ, als 4tes Glied der Proportion zu suchen; CQ und Ah aber müssen bekannt seyn. Das lezte ist nicht zu viel gefordert.

Mit Decimalen wird man immer leicht hinlängliche Schärfe erhalten, um MQ auch darnach sicher genug zeichnen zu können. In uns. Fig. IV. habe z. B. die Helfte der ersten

Axe

Axe AC die Länge von 6 Pariser Linien, die Helfte der zwoten Ce aber die von 8 Linien. So ist die Diagonale Ae gerade 10 Paris. Linien. Daher Ah = 5. Die Potenz der Hyp. wäre also in dem Fall rein 25 Quadratlinien. Das ist nur gelegentlich angemerkt. Streng genommen, haben wir blos nöthig Ah = 5 Par. Lin. zu kennen, und CQ, eine Abscisse auf der Asymptote sei = 1 Zoll, 5 Lin. oder 17 Linien; so rechnet man leicht 17 zu 5 = wie 5 zu (25 : 17) oder zu 1,470 und sieht damit unverzüglich, daß MQ nicht ganz anderthalb Paris. Linien betragen dürfe. So ist also der Punkt M in der Hyperbel genug bestimmt, und man kann dabei um keine Viertelslinie fehlen.

So lehrreich diese Proportion ist, so lehrreich ist eine ebenfalls hierher gehörige, welche wie folgt, entsteht: Man denke ein Rechtek von zwo andern Coordinaten, als MQ . CQ, welches mq . cq heissen mag. Die Abscisse cq sei kürzer als CQ; so wird mq die Ordinate an der Asympt. länger als MQ seyn. Nach §. 27. läßt sich dieß ohne besondre Zeichnung einsehen. Aber die Producte selbst sind gleich,

d. i.

d. i. die Rechtekke MQ . CQ = mq . cq. weil jedes dieser Rechtekke der Potenz der Hyp. gleich ist, wie auch = 1/4 (aa + bb). Nun formire man aus diesen 2 gleichen Producten eine Proportion; sie wird

CQ : cq = wie mq : zu MQ

heissen müssen. Mit Worten ausgedrükt wollen aber diese so gestellte Verhältnisse unleugbar soviel sagen:
„zwei Absciſſen an den Asymptoten verhalten „sich umgekehrt, wie ihre zugehörige Or„dinaten."

Umgekehrt; weil, wenn die Absc. sich geradehin wie die Ordinaten verhalten sollten die Proportion stehen müßte:

CQ zu cq = wie MQ zu mq

welche aber auf eine ganz unrichtige Gleichung, nehmlich auf CQ . mq = MQ . cq. führen würde, die mit der wahren nimmermehr übereinkommt.

Leichtbegreiflich hängt die Umkehrung mit der schon angemerkten Eigenschaft der Coordinaten an den Asympt. zusammen, daß die Ordinaten da abnehmen, wenn die Absciſſen wachsen. Wüchsen sie mit den Absciſſen, so

würde diese Umkehrung notwendig wegfallen. So bestätigt also die Form der Proportion selbst die Angaben des §. 27; und ist der geometrischen Zeichnung gemäs.

Zugleich lernt man daraus, daß, wenn nur zwei Coordinaten an der Asymptote gegeben sind, sich auch jede zwei andre, darnach prüfen lassen. Von den 2 andern mus jedoch wie leicht einzusehen ist, die eine (z. B. cq, die Absc. an der Asympt.) namentlich, gegeben seyn.

§. 30.

Der Ueberschuß über die Ordinate ist auf der einen Seite so gros als auf der andern: LM = ml; jedes ist z—y. Ich will das zwei gleiche Abschnitte der Linie Ll heissen. Solche zwo gleiche Abschnitte haben aber nicht nur dann statt, wenn Ll die verlängerte erste Axe unter rechten Winkeln schneidet, sondern auch wenn eine Linie, wie Ll ist, schief von einer Asymptote bis zur andern geführt wird; wenn also, wie in Fig. V. die Querlinie VW gezeichnet wird, so sind die Abschnitte VE und DW ebenfalls gleich. Das Auge

kann

kann diese Gleichheit nicht allemal schnell wahrnehmen, und darf hierüber nichts mit Sicherheit entscheiden. Aber der Beweis läßt sich evident führen, daß die Gleichheit solcher Abschnitte allemal statt habe.

Man erwäge nur, was folgt:

(I) Man ziehe, wenn VW gezeichnet ist, zwo Hülfslinien paralel Ll und QR durch die 2 Punkte, in denen die Querlinie VW die 2 Schenkel der Hyperbel schneidet. Diese Paralelen gehen durch die verlängerte erste Axe unter rechten Winkeln, (wie in Fig. IV. Ll allein durch sie gegangen war.)

(II) Damit bilden sich zwei ähnliche Dreiekke VQD; und VLE, weil LE mit QR offenbar paralel ist; die homologen Seiten geben deshalb die Proportion:

VE zu LE, wie VD zu QD

und aus zwei noch andern ähnlichen Dreiekken EWl, und DWR fließt eine zweite ebenso:

EW zu El, wie WD zu DR

(III) Man multiplicire diese zwo Proportionen Glied für Glied durch einander; man erhält

VE.EW zu LE.El = wie VD.WD zu QD.DR (IV)

(IV) Das zweite Glied LE . El ist offenbar = bb. Dann es ist eben das Product, das oben in §. 25. LM . Ml geheissen. Und das 4te Glied ist ebenfalls bb gleich; ganz aus demselben Grund. Da trit also für Verhältnis Gleichheit ein; und man ersieht, daß demnach auch die Producte VE . EW und VD . WD gleiche Grösen seien; (das 1ste und 3te Glied.)

(V) Die Zeichnung giebt es, daß EW synthetisch genommen (ED + DW) sei; und VD soviel als (ED + VE) betrage. Die allererstgedachte Producte müssen sich daher auch schreiben lassen:

VE. (ED + WD) = WD. (ED + VE)

und wenn man die Multiplication wirklich vornimmt, so muß dafür gelten:

(VE.ED) + (VE.WD) = (WD.ED) + (VE.WD)

(VI) In dieser Gleichung kommt das Product (VE . WD) zu beeden Seiten vor, kann also wegbleiben; so daß noch die Gleichung statt hätte: VE . ED = WD . ED; wo aber weiter auch ED abwesend gedacht werden

kann, (als Factor zu beeden Seiten). Daher blos VE = WD als gleiche Liniengrösen statt haben müssen. Das ist aber eben, was behauptet worden; Die Abschuitte der Querlinie VW sind VE und WD; und deren Gleichheit ist damit streng erwiesen.

Nun denke man andre und andre Querlinien von einer Asymptote bis zur andern. Zwischen der Curve der Hyperbel und den Asymptoten kommen allemal gleiche Abschnitte zum Vorschein, wie VE und WD; und die Producte eines jeden Abschnitts in den Rest der Linie können allemal als Rechtekke in Gedanken construirt werden, wie (VE . EW), und (VD . WD) deren Fläche dem Quadrat der zwoten Halbaxe gleich ist = bb. So lassen sich demnach unzähliche Rechtekke von gleicher beständiger Flächengröse unter jedem Scheitel der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten denken.

§. 31.

Diese Gesezlichkeit, nach welcher eine so unüberschauliche Mannigfaltigkeit auf eine gewisse

Einsicht, auf ein bestimmtes Quadrat eines Halbaxe, reducirt wird, giebt sehr viel intellectuelle Vergnügung. Sulzers Gedanken über die Quelle alles menschlichen Vergnügens sind mir immer hiebei eingefallen. Auch haben mir die Betrachtungen über die entdekte Verhältnisse der Linien an und unter den Asymptoten der Hyperbel, (ich bekenne es) nicht blos in einer vorübereilenden halben Stunde, sondern so oft ich wieder auf diese Meditationen gerathen bin, jederzeit besondre Freude gemacht. Schon vor mehrern Jahren hatte ich mich über die Notwendigkeit der allgemein ersichtlichen Bemühung des menschlichen Verstandes, alles auf unverkennbare Gleichartigkeit hinauszuführen, in mehrern Lucubrationen verweilt *). Erst nachher gerieth ich auf das Studium der Hyperbel; — und fand die Bestätigung der psychologischen Bemerkungen, deren Interesse mich schon lange gereizt haben.

*) Wovon mein Versuch der Einrichtung uns. Erkent. Vermög. durch Algeber nachzuspüren §. 20. auch §. 56. und 57. zeugen mögen; wie auch meine Erforschungen in Geom. S. 41. §. 27.

Das Studium der Asymptoten an der Hyperbel hatte auch noch aus einem andern Grund für mich viel anziehendes, den ich doch ebenfalls hier noch anführen will:

Ich hatte in frühen Jahren schon gehört und gelesen: es gebe gewisse geometrische Constructionen, in welchen ein paar Linien einander sich immerfort näherten, und sich doch einander niemals erreichten; und — hatte die Möglichkeit dieser Behauptung niemals geglaubt. Ich hatte weiter gehört: Leibniz habe einmal gesagt oder geschrieben: endliche Geister seien wohl als Asymptoten von Gott anzusehen, (so hoch manche den Graden nach auch steigen möchten); und diese Vergleichung gründe sich auf die bemeldte Behauptung. Auch diesen Gedanken hatte ich nie in seinem gehörigen Umfang fassen können. — Das Studium der Hyperbel unter ihren Asymptoten gab mir den genügendsten Aufschluß, und Beruhigung über Zweifel, mit denen ich mich über 10 Jahre wenigstens getragen hatte. Die Evidenz der fortgehenden Näherung, so lange endliche Grösen gedacht werden, fiel

mir

mir dabei notwendig hell in die Augen, und ich lernte den grosen Gedanken verstehen, dessen nur ein Leibniz fähig war. Mag das Gleichnis selbst auch immer, der Strenge nach, nur ein Spiel des Wizzes seyn; es ist doch, (denke ich immer,) ein Spiel des ernsthaftesten und edelsten Wizzes, welchem an Erhabenheit kaum irgend eine andre Ideen-Association an die Seite gesezt werden dürfte.

Fünfte Lucubration.

Ueber die Hyperbel,

in Beziehung auf ihre Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormallinien.

§. 32.

Eine Tangente an die Hyperbel zu zeichnen, d. i. eine gerade Linie so anzulegen, daß sie die Curve nur an einem Punkte berühre, geht auf verschiedene Art an. Ohne Beiziehung der Asymptoten ist folgende Methode leicht verständlich:

Man denke sich eine Hyperbel, in Fig. IV, beinahe aus der obigen Fig. II. genommen; mit dem kleinern Fahrstrich FM bilde man ein gleichschenklichtes Dreiek FMQ. Dessen Construction ist sehr leicht. Sein Scheitel ist in

in M, einem Punkt der Curve, in welchem die 2 Fahrstriche zusammentreffen. Die zwei gleiche Schenkel sind FM und MQ. Der erste, FM, ist für sich schon gegeben; der andre, MQ, wird gemacht, indem man auf dem grössern Fahrstrich ein Stük gerade von der Länge des kleinern Fahrstrichs demarkirt, oder MQ sogros MF aufzeichnet. Die dritte Seite, oder die Basis, FQ, giebt sich sodann ohne Kunst. Von der Scheitelspizze des damit vorhandenen Dreieks werde ein Perpendikel auf diese Basis gelassen, und solches darauf sogleich bis auf die erste Axe hin, verlängert. Dieses verlängerte Perpendikel, MT, ist eben die verlangte Tangente der Hyperbel für den Berührungs-Punkt, M.

Die zween Fahrstriche, und der Winkel, welchen sie formiren, müssen also gegeben seyn, das heißt: die Brennpunkte einer Hyperbel und ein gewisser Punkt in der Curve natürlich selbst, wenn man der Forderung, eine Tangente an die Hyperbel zu ziehen, auf diesem Weg ein Genüge leisten soll. Die Fahrstriche stosen nur in einem Punkt zusammen, welcher eben in der Hyperbel liegt, daran ist nicht zu zwei-

 feln.

feln. Das eine Ende eines construirten Perpendikels in dem Dreiek FMQ mus ebenfalls in diesen Punkt, als in seine Scheitel-Skizze fallen, daran ist ebenso wenig zu zweifeln, (wie die Theorie der Triangel evident folgern läßt.) Daß aber kein andrer Punkt dieses verlängerten Perpendikels in der Curve der Hyperbel liegen könne, sondern blos die gedachte Scheitelspizze in den Tangenten-Punkt falle, wird durch einen indirecten Beweis evident dargethan. Wenn nehmlich das Perpendikel hinauf zu z. B. bis L verlängert wird, und L die Curve berühren sollte, so käme durch diese Annahme folgendes Absurdum zum Vorschein:

Von den zwei Brennpunkten giengen bis L zween Fahrstriche; der kleine von dem grössern abgezogen, müsste eine Differenz geben, welche, als lineari sche Grösse, der ersten Axe gleich seyn müsste; fL — FL müsste solange als AB; d. i. so lange als Qf seyn. (Denn daß Qf die Länge der ersten Axe habe, ist aus der zuerst angeführten Construction und aus der Hauptgleichung fM — FM = AB, gewiß jedem einleuchtend.) Also müssten die Differenzen

renzen fL — FL und fM — FM gleich seyn. Aber man bedenke nur, daß LQf ein stumpfwinkl. Dreiek formire, in welchem die Summe der 2 Seiten LQ + Qf gewiß grösser als die Basis fL ist. Für Qf sezze man AB ein; so folgt daraus, daß der Fahrstrich fL länger, als LQ + AB wäre; er soll aber der Summe dieser 2 Linien ganz gleich seyn; so wie vollkommen fM = FM + AB ist (nach §. 8. und §. 9.) Demnach führt diese Annahme auf ein Absurdum; nach L können keine 2 Fahrstriche einer Hyperbel gehen, d. i. der Punkt L kann nicht in der Curve liegen, folglich keinen Tangentenpunkt abgeben. Man sezze L nun auch etwas höher, oder etwas tiefer; so läßt sich dieser indirecte Beweis allemal führen; blos wenn L in M trifft, fällt der Widerspruch weg, weil nur in diesem Fall die geom. Construction mit der Fundamentalgleichung, fM — FM = AB, bestehet.

Einen directen Beweis, daß, wenn die Brennpunkte mit dem Punkt in der Curve gegeben sind, die Tangente allemal den Winkel FMf in 2 gleiche Theile theile, giebt der Marquis Del'Hospital in §. 123. f. Abh. des Sect.

Coniq. Derselbe sezt aber die Ueberzeugung von einer Gleichung, die der Linie CT gehört, voraus, welche ich erst weiter unten (in §. 41.) beibringen kann.

§. 33.

Wenn eine Hyperbel mit ihren Asymptoten schon gegeben ist, so gelangt man auf folgendem Weg zur Einsicht, wie eine Tangente an einen gewissen Punkt ihrer Curve anzulegen sei.

Man stelle sich wieder Fig. IV. vor; und unsre Einbildungskraft lasse einmal in derselben die Linie Ll dem Scheitel A zurükken. So wie sie hinaufrükt, werden ihre Abschnitte LM und ml immer grösser und grösser zu beeden Seiten, und Mm (oder 2y) immer kleiner. Zulezt wird Mm gar verschwinden, wenn Ll zu Dd wird, d: i. bis zur zwoten Axe abnimmt; (in der obigen Sprache zu reden, wenn 2z zu 2b, oder z zu b rechts und links wird.) Offenbar läßt sich Dd synthetisch als DA + Ad denken, und so in 2 gleichen Linien, als zwo entgegengesezten Tangenten, welche im Scheitel A zusammen stosen, vorstellen. Die entge-

entgegengesezten Ordinaten können nur in einem Punkt zu Null werden; und sie werden es offenbar zugleich. So ist gewiß gar nicht zu zweifeln, daß A der einzige Berührungs-Punkt für die Tangente DA und Ad zugleich sei.

Man erweitre diese Vorstellung vermittelst Betrachtung der Zeichnung in Fig. V.

Die Querlinie VW, welche die verlängerte erste Axe unter schiefen Winkeln schneidet, werde in Gedanken, mit ihrer ersten Lage paralel, bis Tt hinaufgerükt. Ihre zween Abschnitte VE und DW werden grösser und grösser werden, aber in jeder neuen Lage wird jeder um gleichviel grösser geworden seyn. Man denke sich Paralelen mit VW, so viel man will, so wird dieses Gesez beständig statt haben; also gewiß auch noch dann, wenn die Paralele Tt heißt, d. h. wenn die Linie VW gar bis an das äusserste Ende der Curve, in M, gerükt ist, und also keine zween Punkte, wie E und D, mehr vorhanden sind, welche von der Paralele durchschnitten werden könnten; d. i. wenn ED zu Null wird, oder gleichsam beim Verschwinden in den Punkt M zusammen-

menfällt. Da müssen die beeden gleichen Abschnitte bis TM und Mt gewachsen, und TM mus gerade so gros als Mt seyn, so wie VE so groß als DW war. Die Gleichheit der leztern zwo Linien ist erwiesen; (in §. 30.) und da der Beweis allgemein geführt ist, so gilt er auch allerdings, wenn VE und DW am grösten werden, d. h. wenn sie zu TM und Mt worden sind.

Eine Abweichung von der erwiesenen Gesezlichkeit anzunehmen, ist gewiß gar kein Grund vorhanden, so lange Tt mit VW paralel angenommen wird, wie wir eben doch annehmen. Es ist daher klar, daß M ein Berührungs-Punkt, und TM, wie Mt, gleiche Tangenten seien, welche man ebenfalls (wie vorher DA und Ad) entgegengesezt denken kann. Von der Curve kann nur ein Punkt in dieser Stelle angenommen werden, weil sie, als Curve, ihre Richtung beständig ändert, und keine zween Punkte neben einander, wie in einer geraden Linie, in ihr statt haben können.

Damit ist nun deutlich dargethan, welche Linie für eine Tangente anzuerkennen sei. Eben daraus aber läßt sich ohne Mühe abnehmen,

wie

wie man verfaren müsse, um in jedem Fall eine Tangente an einen Punkt der Curve zu zeichnen. Ist z. B. der Punkt M gegeben, und die Asymptoten darüber ebenfalls, so zeichne man von M aus bis an die eine Asymptote eine Paralele MP mit der andern Asymptote Cl (in Fig. V.) Damit hat man ein Dreiek MPC. Dieses verdopple man, d. i. man zeichne das gleiche Dreiek, MPT; so ist MT die Tangente. Eben so gros ist die entgegengesezte Mt, welche bis an die andre Asymptote Cl reicht. Eben so gros, als Mt, ist PC. Auch läßt sich MPCt als ein Trapezion betrachten, bei dessen Zeichnung man nicht fehlen kann, weil MP mit Ct paralel laufen darf, und laufen mus, und PC als gegeben jederzeit angesehen werden kann. Noch vollkommner wird alles in dem nächsten Sphen eingesehen werden.

§. 34.

Man denke sich eine Abscisse vom Scheitel, genommen, AP wie in Fig. VI, aber in entgegengesezter Richtung laufend, PA, und verlängert über den Scheitel hinaus, bis an den

Punkt hin, in welchem die Tangente die erste Axe berührt, d. i. bis T; so heißt diese Linie, PT, die Subtangente der Hyperbel. Da ist sie ohne Asymptoten vorhanden. Aber an den Asymptoten kommt sie so zum Vorschein.

Man zeichne, wenn ein Punkt M in der Curve gegeben ist, das Trapezion, PMCt, wie erst angegeben worden, und ergänze es zu einem Dreiek TCt, welches blos durch Verlängerung der Tangente Mt bis an die Asymptotote CL erhalten wird. Nun sehe man CP als eine Absciſſe auf der Asymptote an, welches nach §. 27. und 28. allerdings angeht, (insoferne ja PM als Ordinate dazu gilt.) Diese Abscisse bis T auf der Asymptote verlängert, trifft die Tangente MT eben da. Also ist eine Subtangente notwendig auch hier vorhanden, weil diese allemal existirt, wenn eine Abscisse fortgeführt wird, bis sie in ihrer Richtung die schon gezeichnete Tangente erreicht; und dieser Saz allgemein geltend ist, die Abscissen mögen auf den Axen oder auf den Asymptoten genommen werden.

Wenn

Wenn sie auf den lezten genommen werden, so gelangt man zu dem sehr einfachen Phänomen.

„daß die Abscissen da der Subtangente jederzeit gleich seien.“

Hievon überzeugt sich jeder, der bedenkt: daß in dem Dreiek TCt die Seite Tt aus 2 gleichen Theilen TM und Mt bestehen, (deren Gleichheit aus §. 30. und §. 33. sich ergiebt,) daß, wenn PM mit CT paralel gezogen wird, auch PT so gros, als PC seyn, die Gleichung PT = PC aber eben die Behauptung kurz darstelle, daß die Abscisse allemal die Länge der Subtangente auf der Asymptote habe. Zu dieser Einsicht dienen also sehr leichte geometrische Gründe, welche auch wohl Kindern ganz faßlich beizubringen sind, (wie ich ehedem selbst in meinen Erforschungen in Geom. §. 2—6. darzuthun versucht haben.)

Die Construction dieses Dreieks TCt bringt es mit sich, daß dessen Basis Ct jederzeit doppelt so gros, als PM folglich das Stük Ct der Asymptote, auf welcher die Subtangente nicht liegt, gerade = 2 PM sei, und man kann daher auch die Proportion aussezzen:

PT

PT zu PM = wie TC zu Ct, wie Tt : Ct
PT zu TC = wie TM zu Tt, wie PM : Ct
und alle diese Verhältnisse sind = 1 zu 2.

Hieraus erhellet nun, wie man, mit diesen Kenntnissen versehen, das Problem: „an einen Punkt der Curve eine Tangente zu zeichnen:" noch leichter und sichrer praktisch auflösen könne, als am Ende des vorherg. §. 33. hat angegeben werden dürfen, weil daselbst der Begriff der Subtangente noch nicht gegeben war. Jezt sieht man ein, daß blos die Ordinate PM mit Ct gleichlaufend zu zeichnen, Ct aber sogleich gerade von der doppelten Länge der Ordinate zu nehmen, d. i. auf der Asymptote zur rechten so zu demarkiren, und von dem nun bestimmten Punkt, t, durch M eine gerade Linie bis an die andre Asymptote zu ziehen sei. Diese ist die doppelte Tangente, oder, wenn man will, es sind 2 entgegengesezte gleiche Tangenten, die dem Punkt M der Curve zugehörig sind.

§. 35.

Man nehme auf zwei Seiten des Scheitels einer Hyperbelcurve zwo Tangenten an, welche

che sich, verlängert, unter dem Asymptoten-Winkel schneiden sollen. Man betrachte ihre 4 Endpunkte an den Asymptoten zu beeden Seiten, und vereinige je zwei und zwei diese Punkte durch gerade Linien Tl, und tv. Diese gerade Linien werden Paralelen; und die durch die Tangenten formirten an den Asymptoten hin liegende 2 Dreiekke, welche allemal am Asympt. Winkel ein gemeinschaftliches Trapezion haben, werden jederzeit von gleicher Fläche seyn. (TCt = Cvl)

Die Ueberzeugung, daß Tl mit vt paralel laufe, (in Fig. VII) erhält man, so bald man einsieht, daß sich CT zu Cv, wie Cl zu Ct verhalte, und also das Dreiekchen Cvt dem grösern ▽ CTl ähnlich sei. Diese Einsicht aber beruht kurz darauf:

Aus dem vorherg. § ist bekannt, daß die Abscisse PC der Subtang. PT gleich, folglich TC so gros, als 2 PC, und weiter auch Ct so gros, als 2 PM seyn müsse. Ebenso ist auf der andern Asymptote Cl = 2 Ck; und Cv so gros, als 2 Nk, oder als 2 CG.

Die Rechtekke CP.MP und Ck.CG müssen

gleiche Flächen haben, (nach §. 26.) Als Producte betrachtet veranlassen sie daher die Proportion:

CP zu CG, wie Ck zu MP

Diese Proportion bleibt offenbar, wenn man jedes Glied duplirt:

2 CP zu 2 CG, wie 2 Ck zu 2 MP

Jezt sehe man aber wieder in die Figur, und erwäge, ob nicht ganz eben so viel sei

CT zu Cv, wie Cl zu Ct

Die Zeichnung, und die Eigenschaft der Subtangenten lässt gar keine andre Annahme zu. Damit ist aber eben die angeführte Behauptung erwiesen; und sie könnte nicht bestehen, wenn die 2 Linien Tl und vt nicht gleichlaufend wären. Die Dreiekke Cvt, und CTl sind offenbar ähnlich.

Aber gleich sind die Dreiekke TCt und Cvl (ohne daß sie sich ähnlich seyn müssen, welches nur in einzelnen Fällen zutreffen kann), von gleichem Flächeninnhalt, darum:

Wenn man das ihnen gemeinschaftliche Ende-Stük Cvt abschneidet, oder hinweg denkt, so bleiben noch die 2 Dreiekke Tvt, und lvt, welche ganz gewiß gleich sind, da sie zwischen

schen Paralelen beschlossen stehen, gleiche Höhen also haben, und ihnen (umgekehrt angesehen) eine Basis vt zukommt. Sind aber diese 2 Flächen gleich, so mus auch noch Gleichheit bestehen, wenn beeden ein gleiches Stük angesezt, d. h. das ▽ Cvr wieder hinzugedacht wird. Folglich ist damit auch die zwote Behauptung evident dargethan, und das Dreiek TCt hat eine eben so grose Fläche, als das Dreiek Cvl hat.

Unter verschiedenen Corollarien, welche sich hieraus ergeben, will ich nur der nächsten erwähnen:

Verbindet man die zween Berürungspunkte der Tangenten in der Curve, M, und N, durch eine gerade Linie MN, so läuft diese allemal mit Tl, und mit vt paralel; und liegt zugleich gerade in der Mitte zwischen den zwei genannten Linien. Beede Behauptungen lassen sich sehr leicht überzeugend einsehen, wenn man blos eine oder zwo Hülfslinien ziehen mag. Man verlängere nur tv bis y, so daß dieser Endpunkt senkrecht über M liege; alsdenn fälle man ein Loth auf Tl, d. i. man

ziehe yw perpendikulär; so sind gewiß die rechtwinklichte Dreiekke TMw, und Mty gleich, weil TM so lang, als Mt ist, und zwei Winkel in beeden gleich sind. Folglich ist auch Mw so lang, als My; und daher MN in der Mitte zwischen den zwo zuerst genannten Hauptlinien Tl und tv.

Eben das lässt sich auf der andern Seite darthun; und so ist die behauptete Paralelität mit dem erstgeführten Beweis wesentlich connex.

Ich verlasse nun die Asymptoten, die Tang. und Subtangenten an denselben auf einige Zeit. Die Subtangenten auf der ersten Axe, und ihr Verhältnis gegen die Abscissen auf dieser, sollen uns jezt noch eine besondre Unterhaltung gewähren. Um aber in diesem interessanten Geschäft glüklich zu seyn, ist es nöthig, zuvörderst noch zwei Linien kürzlich kennen zu lernen, welche uns bis hierher noch gar nicht vorgekommen sind; die Normallinie und die Subnormallinie.

§. 36.

Ein Perpendikel von der Abscisse (oder verlängerten ersten Axe) auf den Endpunkt der

Tan-

Tangente, wo sie die Hyperbel berührt, gelassen, NM, ist die Normallinie der Hyperbel. (Fig. VI.) Man kann sie auch als Basis eines rechtwinklichten Dreieks NMT betrachten, dessen Kathetus jederzeit die Tangente TM, vorstellt; die Hypotenuse aber ist jezt erst näher in Betrachtung zu nehmen.

In der Figur ist diese Hypotenuse TN, oder synthetisch so gros, als (PT + PN). In dieser Zusammensezzung kennen wir bereits das eine Stük, PT, als die Subtangente der Hyp. (auf der ersten Axe), wie schon S. 122 in §. 34. vorgekommen. Das andre Stük oder Segment, PN, führt aber den besondern Namen der Subnormale, welche uns eben vorzüglich auf diesem Blatt vor allem andern genauer bekannt werden soll.

Die Subnormale ist jederzeit ein Stük der Abscisse auf der verlängerten ersten Axe; mit ihrem einen Ende stöst sie an die Normale, MN; mit ihrem andern an die Ordinate, PM; oder sie ist die Entfernung der Punkte auf der verlängerten ersten Axe, durch welche die Ordinate und die Normale, wenn sie selbst verlängert werden, jederzeit gehen müssen.

Man erhält eine Gleichung für sie, in welcher blos die Axen und die Abscisse ihr Aequivalent ausdrükken, auf folgendem Weg:

(I) Der Normale NM läuft jederzeit QF paralel, nemlich der Basis des gleichschenklichten Dreieks, MFQ, welches §. 32. S. 115 uns bekannt worden, gleichlaufend. Dieser Paralelen wegen hat daher die Proportion statt: fQ zu fM = (wie) fF zu fN.

(II) Aber fQ ist der ersten Axe gleich = 2a; und die Gleichung zu fM ist oben in der Note zu §. 12. S. 51 durch a, c, x ausgedrükt, vorgekommen; desgleichen fF = 2c; Also
2a zu [(cx : a) + a] (wie) 2c zu [c + (ccx : aa)]
wird eben so viel, als die erstgesezte Proport. gelten müssen. Den Ausdruk des lezten Glieds

fN = c + (ccx : aa)

merke man vorzüglich.

(III) fN ist auch als (fP + PN) vorzustellen; oder auch, wenn das erste Stük wieder in 2 Segmenten gedacht wird, als
(fC + CP + PN) und hiedurch erhält man PN allein:

fN — fC — CP = PN.

(IV)

(IV) Man sezze die bekannte Werthe für die drei linearische Grösen ein, so erhält man

c + (ccx : aa) — c — x = [(ccx : aa) — x],
ganz so viel, als = PN

Durch Reduction unter einen Nenner ist aber dieses so viel, als [(ccx — aax) : aa]
oder [x (cc — aa) : aa] welcher Ausdruk für die Subnormale PN wohl zu behalten ist.

(V) Erinnert man sich aus §. 11 daß cc — aa soviel als bb sei, so erkennt man bald, daß die Gleichung sich sehr vereinfachen lasse, nehmlich zu [(bb . x) : aa] = PN, wodurch man zu dem Saz gelangt:

aa : zu bb = (wie) x : zu PN

Mit Worten: Das Quadrat der ersten Axe verhält sich zum Qu. der zwoten, wie die Abscisse vom Mittelpunct der Hyperbel zur Subnormale; (wo man statt Axe auch Halbaxe sezzen kann.)

Noch einfacher wird die Gleichung und Proportion, wenn man den Parameter anbringt, und daran denkt, daß ap = 2. bb ist; Denn daraus folgt:

2aa zu ap, oder 2a zu p = x : PN

woraus erhellet, daß die 2 veränderliche

Grösen, die Abscisse und die Subnormale, sich allemal wie die zwo beständigen, die erste Axe und ihr zugehöriger Parameter, gegen einander verhalten;
wie auch, daß die Fläche eines Rechteks, aus dem Parameter und der Abscisse construirt, so gros sei, als die eines Rechteks unter der ersten Axe und Subnormale.

§. 37.

Man denke sich grössere und grössere Abscissen, als unsre Figur darstellt; Man denke sich die Abscisse CP endlich gerade sogros als 2 . CA, d. h. x sei = 2a angenommen, so wird in diesem Fall, die Subnormale gerade dem Parameter der ersten Axe gleich seyn: PN = p.

Den Beweis dieser Behauptung giebt man sich sehr leicht. Man darf nur in unsrer allererst erwiesenen Gleichung zur Subnormale, nehmlich in PN = (px : 2a) für die Abscisse x jezt 2a einsezzen, welches seyn mus, wenn x die Länge von 2a einmal gerade haben soll, so wird gewiß die Gröse zwischen der Klammer zu (p.2a : 2a) d. i. p = PN.

Was

Was aus der Subnormale, im angenommenen Fall einer gleichseitigen Hyperbel werde, darauf führt eben die angeführte Hauptformel. Weil nehmlich bei der gleichseit. Hyp. die erste Axe dem Parameter gleich ist, (nach §. 15.) so erhält PN blos x zum Aequivalent, weil da (px : p) anstatt (px : 2a) mus gesezt werden dürfen, und daher die Gröse zwischen der Klammer schlechthin zu x wird. Demnach ist in der gleichseit. Hyperbel „die Subnormale der Abscisse allemal ganz gleich.“ (PN = x)

§. 38.

Die Normale, NM, lässt sich, in Fig. VI, als Hypotenuse in dem rechtwinkl. Dreiek PNM betrachten; und ist als solche $\sqrt{(PM^2 + PN^2)}$ gleich. Ihr algebraischer Ausdruk wird nicht sehr geschmeidig, ob man wohl $\sqrt{([bb(xx - aa) : aa] + [(bbx : aa)^2])}$ in eine kleinere Form bringen, und unter einen Nenner zusammendrängen kann; woraus sich alsdenn doch die Proportion formiren lässt:

$$aa : bb = \sqrt{[aaxx + bbxx - a^4) : bb]} : NM$$

 Wenn

Wenn man aber den Parameter der ersten Axe p für (2bb : a) einschiebt, so erhält man $2a : p = \sqrt{[(2axx + pxx - 2aaa) : p]} : NM$. Man nehme auch hier, wie bei der Subnormale, einmal die Abscisse CP gerade = 2a an, so wird in dem Fall die Gleichung freilich sehr einfach, nehmlich

$\sqrt{[3aa + 2ap]}$ oder $\sqrt{[3aa + 4bb]}$ ist = NM.

§. 39.

Allemal ist hiebei die Normale eine grössere Linie, als der halbe Parameter. Daß aber überhaupt in der Hyperbel gar keine Normale statt habe, welche kleiner, als der halbe Parameter der ersten Axe sei, zeigt sich leicht so:

Man denke sich kleinere und immer kleinere Abscissen, vom Mittelpunkt an genommen, so kann CP abnehmen, bis an den Scheitel der Hyperbel, d. i. bis CA aus ihr wird; da wird dann x = a gelten müssen. Diesen Werth sezze man in die Gleichung der Normale ein; so heben sich alle Grösen bis (p : 2) = NM. Kleiner, als a kann die Abscisse, x, nicht werden; also auch die Normale NM nicht

kleiner.

kleiner, als der halbe Parameter. Eigentlich wird die Normale in diesem gesezten Fall gar zu o; es ist keine Hypotenuse mehr vorhanden, weil kein Kathetus, keine Ordinate, y, mehr vorhanden ist. Denn, wenn das Ende der Abscisse, x, im Scheitel liegt, so ist y gewiß verschwunden; also die Ordinate o; der halbe Parameter ist aber ebenfalls eine Ordinate; folglich jezt auch nicht mehr vorhanden, so wie gar keine Ordinate mehr überhaupt da ist.

Eben die Beschaffenheit hat es mit der Subnormale. Auch sie wird in der Gleichung, welche wir als (px : 2a) = PN kennen, zu (p : 2), wenn man x = a annimmt, und diesen Werth in die Klammer einschiebt. Also lässt sich auch keine Subnormale gedenken, welche kleiner, als der halbe Parameter wäre. Eigentlich verschwindet sie in der Zeichnung auch hier; wie jeden die Figur schon belehren mus. Man mus sich daher hüten, den algebraischen Ausdruk nicht miszudeuten; und kann an diesem Beispiele, unter andern sehen, wie man sich bei algebraischen Evolutionen vor eiligen Irrschlüssen in Acht zu nehmen habe.

§. 39.

Anhang §. 39.

Bei der gleichseitigen Hyperbel erhält die Normale den Ausdruk

$$\sqrt{(2xx - aa)} = NM$$

und aus dieser Gleichung lässt sich ohne viele Mühe die Behauptung ableiten, daß das Quadrat der Normale bei der gleichseit. Hyperbel allemal einem Rechtek, das den Ausdruk

$$(x\sqrt{2} - a).(x\sqrt{2} + a)$$

hat, gleich sei; und daher auch einem Rechtek

$$= (PN.\sqrt{2} - a).(PN.\sqrt{2} + a)$$

weil, (wie wir aus dem vorhergehenden Blatt ersehen haben) bei der gleichseit. Hyperbel die Subnormale PN der Abscisse jederzeit ganz gleich ist.

§. 40.

Wir wenden uns nunmehr wieder zu den Subtangenten; und werden jezt ohne Schwierigkeit eine Gleichung für sie, namentlich für PT (in Fig. VI.) herauszubringen vermögen, in welcher blos x, (die Abscisse, vom Mittelpunkt genommen) und a vorkommen sollen.

sollen. Man stelle deshalb nur folgende Betrachtungen an:

(I) daß das Loth PM in dem rechtwinkl. Dreiek NMT die geometrische Mittelproportionale zwischen den zwei Segmenten der Basis sei

PN zu PM, wie PM zu PT

welches nach den ersten Gründen der Geometrie gar nicht anders seyn darf.

(II) daß ganz ebenso viel, als die Grösen dieser Proportion, den vorigen Blättern gemäs, gelten müsse:

(bbx : aa) zu y, wie y zu PT

und daß daher die Gleichung zu der Subtangente PT zunächst notwendig heissen müsse

[aa . yy : bbx] = PT

(III) daß sich hierauf für das Quadrat der Ordinate, yy, allerdings das Aequivalent [bb (xx — aa) : aa] in die Klammer [ ] einsezzen lasse, und dadurch

[(xx — aa) : x] = PT zum Vorschein kommen müsse, weil sich ja aa und bb im Zähler und Nenner augenscheinlich bei dieser Einschaltung heben;

(IV) daß die Differenzgröse xx — aa ganz eben

eben so viel, als $(x+a).(x-a)$ sei, und daher die Subtangente

$$PT = (x+a).(x-a) : x$$

ganz füglich zu betrachten sei, und endlich.

(V) daß die Ableitung der Verhältnisse

x zu $(x+a)$ = wie $(x-a)$ zu PT

daraus äusserst natürlich folge.

Und eben vermittelst dieser (hinlänglich damit gerechtfertigten) Darstellung erhellet jezt, daß die Subtangente blos durch die Abscisse und erste Axe sich ausdrükken, lasse; und zugleich erscheinet nunmehr eben diese Subtangente als aufgestelltes viertes Glied einer gar sehr bequem zu übersehenden Proportion, welche man, mit Rüksicht auf die Figur, auch schreiben kann:

CP : zu BP = wie AP : zu PT

Nur allein durch Hülfe dieser Anordnung wird demnächst der aufmerksame Beobachter auf den bündigen und interessanten Saz geleitet: „Die Subtangente sei die „vierte Proportionallinie zu den drei Entfernungen der Ordinate

„von dem Mittelpunkt der Hyperbel,
„und von den beeden Scheiteln."

§. 41.

§. 41.

Nunmehr kennen wir also die Hypotenuse, TN, welche (in Fig. VI.) in dem Dreiek NMT vorkommt, als die Summe der Subnormale und Subtangente, für welche beede wir die gehörigen Ausdrükke jezt entwikkelt haben.

Es lassen sich daraus viele Folgerungen ableiten, von welchen sogleich einige angeführt werden sollen:

(1stes Corollar.)

Ein Rechtek, aus den zwo Abscissen von den 2 Scheiteln der Hyperbel, errichtet

BP . AP, oder $(x + a) . (x - a)$

hat eben die Flächengröse,

wie ein Rechtek, das aus der Subtangente und Abscisse vom Mittelpunkt errichtet wird

PT . CP, oder PT . x

Man sehe nur die mittlern und äussern Glieder der geometr. Prop. des vorherg. §. 40. an; um sich hievon zu überzeugen.

(2tes Corollar.)

T ist der Punkt, wo die Tangente die erste Axe betrift, oder (verlängert) schneidet. Die

Linie

Linie vom Centrum der Hyperbel bis an diesen Punkt, CT, mit der Abscisse CP, oder x, rechtwinklicht zusammengesezt, giebt ein Rechtek, welches $= aa$, oder dem Quadrat der ersten Halbaxe gleich, ist.

Denn CT ist der Differenz CP — PT, oder $x - \frac{(xx - aa)}{x}$ gleich. Bringt man alles unter einen Nenner, so heist der Zäler $xx - (xx - aa)$ d. h. $+ xx - xx + aa$, oder aa allein; der Nenner aber ist x; also ist

$CT = (aa : x)$; daher $CT . x = aa$

welche Gleichung eben den Saz selbst darstellt. Damit ergiebt sich nun auch die Halbaxe a einfach und allein als eine interessante geometr. Mittelproportion, $x : a = a : CT$

(3tes Corollar.)

CT ist immer ein Stük der ersten Halbaxe, AC; das andre Stük ist AT, so daß $CT + AT = AC$ gilt. Für CT haben wir jezt bereits eine bequeme Gleichung; für das andre nicht weniger interessante Stük, AT, läßt sich ebenfalls ein Aequiv. blos aus a und x, wie folgt, deduciren: AT ist der Differenz

AC

AC — CT gleich, oder = [a — (aa : x)]; welches so viel, als (ax — aa) : x ist. Daraus ergiebt sich

x : zu (x — a) = wie a : zu AT

womit sich zeigt, daß AT die vierte Proportionale zu den drei bekaunten Grösen

zur Abscisse vom Mittelpunct CP, oder x,
zur Abscisse vom Scheitel, AP oder x — a,
und zur ersten Halbaxe, a, sei.

Auch die Gleichheit der Rechtekke

a.(x — a) = x. AT, oder AC. AP = CP. AT

fliest notwendig aus eben der Proportion.

§. 42.

Rükblikke in vergangene Geschäfte, durch deren glückliche Beendigung mehrere verwikkelte Verhältnisse aufgehellt werden, sind jedesmal angenehm. Man übersehe einmal die Linie CN oder die Entfernung des Mittelpunkts der Hyperbel von dem Ende ihrer Normale in N; und denke sich diese Linie in Segmenten:

CT + AT + AP + PN ist = CN.

Für alle diese Linien haben wir nun befriedi-

gende Gleichungen herausgebracht; auch noch dazu für die Subtangente

PT, welche = (AT + AP) ist,

besonders; wie auch für CF; und

AF, = CF — AC, oder (c—a) wie bereits oben in §. 11. vorgekommen. Alle diese Linien lassen sich als Bruchstükke oder einzelne Segmente einer einzigen Abscissenlinie vorstellen. Sie liegen entweder auf der ersten Axe selbst, (und sind kleiner als dieselbe,) oder auf ihrer Verlängerung.

Wie wir nun wol übersehen, hat es den Künsten der Analytiker geglükt, diese Segmente ohne Ausname durch die Axen, und eine der Coordinaten in sehr geschmeidigen Ausdrükken darzustellen. Reduction auf eine gewisse immer angenehme Gleichartigkeit war auch hier die allgemeine Bemühung.

Sechste Lucubration.

Ueber die Hyperbel, in Beziehung auf ihre Diameter.

§. 43.

Man kann die erste Axe einen Diameter der Hyperbel nennen. Aber es giebt unzählige Diameter der Hyperbel, welche keine erste Axen sind. Jede gerade Linie, welche von einem willkürlich gewählten Punkt einer Hyperbel an die Curve der entgegengesezten Hyperbel so gezogen wird, daß sie durch den Mittelpunkt der Hyperbel geht, ist ein erster Diameter in unsrer Fig. V. ist MCM', ein solcher Durchmesser der Hyperbel. Er macht jederzeit mit der ersten Axe, wo er sie in der Mitte durchkreuzt, einen spizzigen Winkel.

Gedenket man sich an dem Punkt M, wo er die Curve berührt, (oder falls er verlängert wird, durchschneidet), zwo entgegengesezte Tangenten MT, und Mt angebracht, und stellt sich dieselbe als eine Linie, Tt, so gros als MT + Mt, vor, so heißt diese noch innerhalb, oder zwischen den beeden Asymptoten befindliche Linie, oder eine Paralele mit ihr, die durch den Mittelpunkt C gehen, und von gleicher Länge seyn mus, der conjugirte Durchmesser.

Dieser wird durch den zuerst angeführten Diameter MM' in zwo gleiche Helften getheilt; und in dieser Beziehung nennt man auch gewöhnlich

MM', einen ersten Diameter,

und Tt, oder die Paralele mit Tt, einen zweiten conjugirten Diameter der Hyperbel.

Die Richtigkeit der erwähnten Halbirung bedarf keines weitern Beweis, wenn man sich nur erinnern mag, was in §. 33. dargethan worden.

§. 44.

Man denke sich Paralelen unter den conjugirten Diameter, Tt, so viel man will, immer

so

so gezeichnet, daß sie durch die Asymptoten begränzt werden; so werden auch diese Paralelen durch den ersten Diameter jedesmal, wie Tt selbst, halbirt werden. In Fig. V. ist VW eine solche Paralele; da, wo sie der erste verlängerte Diameter durchschneidet, in F, ist ihr Mittelpunkt.

Man findet den Beweis hievon durch die Betrachtung, daß erstens die zwei Dreiekke CMT, und CFV, der Paralelen wegen, einander ähnlich sind;

zweitens, daß die Dreiekke CMt, und CFW ebenfalls einander ähnlich sind. Daher ergeben sich die 2 Proportionen:

CM : zu MT = wie CF : zu VF

CM : zu Mt = wie CF : zu FW

Aber die zweiten Glieder sind gleiche Grösen, (MT ist so lang als Mt) dem vorigen §. 33. gemäs, also müssen auch die 4ten Glieder gleiche Grösen enthalten, VF = FW. Folglich ist die Linie VW, da sie so gros als VF + FW ist, auch = 2 . VF zuschreiben; und daher kann F nichts anders, als ihr Mittelpunkt seyn.

Hieraus fliest weiter, daß also ein solcher

erster Diameter auch jedesmal ED in 2 Helften theile, nehmlich das Stük der Linie VW, welches zwischen die zween Schenkel der Curve fällt; dann VW besteht ja aus ED, und 2 gleichen Ueberschüssen, VE und DW. (nach §. 30,) welches die Abstände der Curve von den Asymptoten sind. Diese können zu beeden Seiten wol wegbleiben, und F bleibt doch immer noch der Mittelpunkt der (jezt freilich kürzern) Linie, die von E bis D reicht, und synthetisch EF + FD ist.

§. 45.

Diese zwo Linien EF und FD lassen sich als zwo entgegengesezte Ordinaten betrachten, und CF ist ihre zugehörige Abscisse, welche also auf dem verlängerten ersten Diameter CM liegt. Diese Behauptung befremdet nur, so lange man an rechtwinklicht-gezeichnete Ordinaten auf der verlängerten ersten Axe gewöhnt ist. Aber schon oben §. 27 ist erinnert worden, daß der Begriff von Coordinaten nicht an rechte Winkel gebunden sei. Wenn gleich die Linie EF einen schiefen Winkel mit CF macht, so kann EF dennoch eine Ordinate,

und

und CF eine Abscisse vorstellen. Jene kann y, diese x heisen. Das Daseyn von Functionen ist nicht dem geringsten Widerspruch unterworfen, so bald eine Linie, wie CF oder x, als eine veränderliche Gröse, bald länger bald kürzer gedacht, und dabei beobachtet wird, wie EF, und Paralelen mit dieser Ordinate, von der Länge und Kürze der unbeständigen Abscisse abhängen.

Eben damit erweitern sich aber unsre Begriffe über Axen, Diameter und die übrige Hauptlinien, welche zu der ganzen Conoide der Hyperbel gehören, gar sehr. Dieses wird jedermann einleuchtend werden, der sich nur vollends von der Behauptung überzeugen kann, daß die Fundamentalgleichung für die Hyperbel, für yy, welche oben §. 12 erwiesen worden, noch statt habe, wenn man gleich conjugirte Diameter mit schiefen Winkeln, und Abscissen, wie hier CF in Fig. V. ist, annimmt. Es sei unsre Sorge nun, den Beweis dieser wichtigen Behauptung sogleich einzusehen.

§. 46.

Es gienge wol an, die conjugirten Halbdiameter CM und MT auch wieder a und b, wie

oben die 2 Halbaxen, zu nennen; sie mögen aber hier m und n heisen, um a und b blos für rechtwinklichte Coordinaten zu behalten.

CF aber heisse x, und EF oder FD = y. Zu y oder yy wird eine Gleichung aus m, n, x gesucht. Man findet sie, wenn man erwägt:

(I) daß WD . DV dem Quadrat der zwoten Halbaxe oder so gros, als bb sei, nach den Säzzen des §. 30.

(II) daß MT . Mt, oder MT^q, ebenfalls so gros als bb; also auch nn = bb und zugleich dem Rechtek DW . DV gleich sei

(III) daß DW . DV sich auch schreiben lasse (FW — FD) . (FV + FD); und daher auch diese 2 Factoren in den 2 Klammern dem Quadrate nn oder bb gleich seien

(IV) daß diese Factoren, in den kleinern Buchstaben ausgedrükt, auch so viel besagen, als

$$[(nx:m) - y] . [(nx:m) + y] = nn,$$

weil FW = (nx : m) unleugbar ist, und eben so die gleiche Liniengröse FV; welches man schon aus den Proportionen in §. 44 ersehen kann, wenn man die drei ersten Glieder anstatt CM, MT, CF, mit den Buchstaben

den m, n, x benennt, wie in dem Eingang unsers gegenwärt. §. eben angenommen ist.

(V) Daß diese Gleichung zu nn auch eben so viel, als die Differenz der Quadrate sei:

$$(nx : m)^2 - yy = nn$$

woraus $(nx : m)^2 - nn = yy$ folgt; oder nach Reduction unter einen Nenner, wird $[(nx)^2 - (mn)^2]$ div. p. $mm = \frac{nn\ (xx - mm)}{mm}$ die Gleichung zu yy; welche nun ganz die nehmliche Zusammensezzung und Gestalt hat, welche oben in §. 12 und anderwärts schon so oft vorgekommen, als

$$bb\ (xx - aa) : aa = yy$$

Man sieht offenbar, daß, wenn wir im Eingang dieses §. sogleich für die Linien CM und MT die Buchstaben a und b genommen hätten, (anstatt m und n) die Analysis uns auf die nehmliche Signaturen, welche das Aequivalent der quadrirten Ordinate in §. 12 sind, hinausgeführt haben würde.

Damit sind wir nun im Hellen, um die Behauptung zu verstehen, welche am Ende des nächstvorh. Blatts von mir angeführt worden; und gelangen hiedurch überhaupt zu der

Ueberzeugung, „daß die Hyperbel in Rükſicht „ihrer conjugirten Diameter die nehmliche Ei„genſchaften haben müſſe, wie in Rükſicht „ihrer zwo Hauptaxen.“

§. 47.

Die Verhältnis zweier Ordinaten, y und Y, ergiebt ſich daher aus eben dieſer Gleichung, ganz auf eben dem Weg, welcher oben in §. 19, gezeigt worden. Denn yy iſt offenbar das vierte Glied der Proportion:

$$mm : nn = (xx - mm) : yy$$

wo man anſtatt der 2 lezten Glieder auch

$$= (XX - mm) \text{ zu } YY$$

denken kann. Die conjugirte Diameter ſind beſtändige Gröſen. Daher ſich dann zuſammenordnen läßt:

$$(xx - mm) : (XX - mm) = \text{wie } yy : \text{zu } YY$$

Das erſte Glied iſt auch zuſchreiben: $(x - m) . (x + m)$; und das zweite: $(X - m) . (X + m)$; wodurch man die 2 Factoren erhält, denen in Zeichnung zwei Segmente der Abſciſſenlinie wie oben in §. 19 entſprechen. Denn eben dieſe Segmente laſſen ſich zu Conſtruction der Rechtekke anwenden, deren

deren Verhältnis ($yy : YY$) ist; so daß alles den nehmlichen Gang nimmt, den wir bereits in dem angeführten §. 19. kennen gelernt haben. Und so wird nun deutlich genug, daß sich der daselbst geführte Beweis viel allgemeiner führen lasse. Anfangs aber hatten wir noch nicht hinlängliche Data, um ihn in der Allgemeinheit vorzutragen, in welcher man denselben jezt, wie ich denke, mit Leichtigkeit übersieht.

§. 48.

Um mehrere Eigenschaften der Hyperbel, welche ihre Diameter allgemein angehen, auf eine leichte Art beweisen zu können, mus man noch eine Ordinatengleichung für die Hyperbel kennen, welche ich oben in allen Lucubrationen bisher noch weggelassen habe, weil mir die zwo Gleichungen, welche §. 12. und §. 21. liefert, Beschäftigung und auch Stoff genug zu geben schienen, um die bisher beigebrachten Säzze vollkommen zu fassen; und jezt erst die 3te Gleichung uns brauchbar werden kann.

Bei der Gleichung, welche uns am allermeisten unterhalten hat, $yy = bb (xx - aa) : aa$

wurden

wurden die Abscissen jederzeit von dem Mittelp. C aus auf der ersten Axe genommen; so daß bei senkrechten Ordinaten die Abscissen auf der verlängerten ersten Axe selbst lagen. Man nehme nun einmal auch die Abscissen, zwar von eben dem Mittelpunkt C aus, aber auf der 2ten Axe oder auf deren Verlängerung liegend, also in der Richtung von DC, oder EC in der VIten Figur, so daß Cp eine solche Abscisse wäre; so wird pm eine zu dieser Abscisse gehörige Ordinate vorstellen müssen, welche, wie der Augenschein giebt, mit der ersten Axe paralel läuft, und bis an die Curve reicht. Alle Ordinaten, welche uns bisher in der IIten und IVten Luc. beschäftiget haben, liefen innerhalb der Curven mit der 2ten Axe, oder doch mit einem 2ten Diameter überhaupt, paralel; aber nun soll unsre Phantasie sich zu einer andern Richtung bequemen. Die Ordinaten sollen mit dem ersten Diameter paralel laufen, und also auf der 2ten Axe, oder auf ihrer Verlängerung senkrecht oder geneigt stehen, und ausserhalb der Curve befindlich seyn.

Die

Die Abscisse heisse nun wieder = x; (ist aber jezt Cp)

Die Ordinate wieder = y; (ist aber jezt pm)

Die Benennungen der Axen AB und ED bleiben, 2a, und 2b, wie bisher; so gelangt man durch nächstfolgende Vorstellungen zu der erwähnten dritten Haupt-Ordinatengleichung.

(I) Mit pm ist CP gleichlaufend; also auch CP jezt y zu achten; und daher AP jezt y — a, wie es oben x — a hat heissen müssen; AP′ aber mus jezt y + a gelten. Cp ist so lang als Pm; folglich gilt jezt Pm = x, weil Cp wie gedacht, für die Abscisse, x, zu nehmen ist.

(II) Man denke nun die Proportion:

aa : zu bb = wie (AP . AP′) : zu (Pm)²

Man wird allerdings für die 2 lezte Glieder untersezzen können = (y — a) . (y + a) : zu xx, wie die Ausdrükke im Isten Act notwendig geben. Also werden nun die Verhältnisse bestehen

aa zu bb, wie yy — aa zu xx

(III) Man stelle die Glieder so, daß das 3te das 2te werde.

aa zu yy — aa, wie bb zu xx; und addire

zu

zu dem 2ten aa; zu dem 4ten xx, so bleibt noch die Proportion:

$$aa \text{ zu } yy = bb \text{ zu } (xx + bb$$

Folglich ist $yy = aa.(xx + bb) : bb$; oder $\frac{aaxx}{bb} + aa$ welches eben die verlangte 3te Gleichung für die Hyperbel ist, welche ich oben geflissentlich zurükgelassen habe. Sie läßt sich auch $[(xx : bb) + 1] . aa = yy$ schreiben; und gilt also für jede quadrirte Ordinate, wie CP^2 oder $(pm)^2$.

Die Figur zeugt, daß pm nach und nach hinauf bis an die Helfte der ersten Axe, CA, rükken könne, und daß da diese Ordinate am kleinsten sei, wenn sie zu CA selbst wird; daß aber in diesem Fall die Abscisse Cp oder Pm gar verschwunden seyn müsse. In algebr. Ausdruk gehört also jezt zusammen:
zu $y = a$ steht $x = o$.

Man versuche einmal, was herauskomme, wenn man in der erwiesenen Hauptgleichung $yy = [aa(xx + bb) : bb]$ die Abscisse x als o sezt. Offenbar erhält man in der Klammer $[aabb : bb]$ d. i. aa allein, dem Quadrat der

Ordi-

Ordinate, yy, gegenüber; so daß also Algeber auch hier eben dahin, wo Geometrie, führt.

§. 49.

Man betrachte in Fig. VIII. die vier daselbst befindliche Curven; Je zwo und zwo entg. gesezte gehören zusammen. AB sei die erste Axe, welche der obern und untern Hyperbelcurve zukomme; und Ll sei die zwote Axe. Dagegen sei Ll die erste Axe der Seitencurven, die rechts und links stehen, und AB derselben zwote Axe; so sieht man da vor sich

zwo conjugirte Hyperbeln.

Sie haben einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, C; Die Weite desselben von F, dem Brennpunkt der einen Seiten-Hyperbel, (welche man nehmen will) mus gerade der Hypotenuse AL aus dem Dreiek CAL gleich, das ist $= \sqrt{(aa + bb)}$ seyn, insoferne AC wieder, wie bisher, a genannt wird, und CL gleichförmig b.

Jezt erst werfe man den Blik auf schiefgezeichnete Diameter. IH, und MN sind zween dergleichen, welche selbst conjugirt heissen. Von zwei ihrer Enden, wo sie die Curven in

I und

I und N berühren, sind, Perpendikel auf die erste verlängerte Axe gezogen, PI und QN, welche man als zwo Ordinaten ansehen kann;

PI, als Ordinate auf der verlängerten ersten Axe, zu welcher also CP als Abscisse gehört; diese Ord. liegt innerhalb der Curve

QN, als Ordinate auf der zwoten Axe der conjugirten oder Seitenhyperbel, zu welcher also QC oder Np als Abscisse gehört; diese Ordin. liegt ausserhalb der Curve.

Nun lässt sich beweissen, daß allemal, (diese Construction vorausgesezt,)

das Quadrat der Abscisse CP (also xx) der Summe der Quadrate der ersten Halbaxe, und der Ordinate QN, gleich sei;

$= AC^2 + QN^2$, auch $aa + vv$; (wenn QN kurz v genannt wird.)

Den Beweis dieses schönen Sazzes findet man, wie folgt:

(I) Der Deduction des nächstvorherg. §. 48 gemäs, kann man die Proportion aufstellen

$$aa : bb = aa + vv : QN^2$$

Denn man erwäge nur, daß Ll, als erste Axe der Seiten-Hyperbel, und AC, als deren

ren zwote Axe anzusehen sei, und daß (dem vor. §. in Nr. III. gemäs)

das Qu. der zwoten zum Qu. der ersten Axe sich verhalte, wie die Summe der Qu. der 2ten Axe, und der Abscisse (auf der 2ten Axe) zum Qu. der Ordinate auf der 2ten Axe;

daß aber hier die 1ste Axe Ll = 2b heisse, und die 2te AC = 2a; folglich notwendig aus der Proportion des vorh. §phen, welche man sich hier deutlich als

$$bb : aa = (bb + xx) : yy$$

vorstelle, die, welche uns jezt gilt, mit der Umkehrung von a und b, geordnet werden müsse:

$$aa : bb = aa + vv : QN^2$$

(II) Für die quadrirte Ordinate, PI^2, mus (wie in allen vorh. Blättern für PM^2) die Proportion eintreten:

$$aa : bb = xx - aa : PI^2$$

(III) Aus diesen 2 Proportionen, deren 2 erste Glieder in beeden identisch sind, ordne man die lezte zusammen, so daß

$$PI^2 : QN^2 = xx - aa : aa + vv$$

aufgestellt werde.

(IV) Die rechtwinkl. Dreiekke PIT und CQN sind einander ähnlich, weil der Winkel NCQ seinem Verticalwinkel MCT gleich ist, und dieser, der Paralelen wegen, dem äussern bei T, d. i. dem Basiswinkel PIT in dem Dreiek gleichen Namens; bei P und Q aber rechte Winkel sind. Die Katheten PI und QN verhalten sich deshalb zueinander, wie die zwo Grundlinien der ähnl. Dreiekke, PT und CQ; leichtbegreiflich daher, alles quadrirt:

PI^2 zu QN^2, wie PT^2 zu CQ^2

also auch $= [(xx - aa)^2 : xx]$ zu vv

weil die Subtangente, unquadrirt, PT (nach §. 40.) zur Gleichung hat (xx — aa) : x.

(V) Ordnet man nun aus Nr. III. und IV. allemal die 2 lezte algebraisch-signirte Glieder zusammen, so erhält man zum lezten Glied einer neuen Proportion:

$$[(aa + vv) . (xx - aa) : xx] = vv]$$

und xx zu beeden Seiten multiplicirt, giebt die (ausgesezte) Gleichung:

$$aaxx + vvxx - a^4 - aavv = vvxx$$

von welcher der Weg zum gesuchten Haupt-Ziel nun gar leicht ist. Nehmlich

(VI) Weil + vvxx zu beeden Seiten steht, kann

kann es wegbleiben; und dann führt eine einzige Division durch aa auf $xx - aa - vv = o$; woraus sich endlich

$$xx = aa + vv; \text{ d. i. } CP^2 = AC^2 + QN^2$$

zeigt; und der behauptete Saz damit selbst sich, offenbar jezt als erwiesen, darstellt.

Es ist nur eine Umwendung, wenn man hiernächst sogleich daraus die Differenz bildet,

$$vv = xx - aa, \text{ d. i. } = (x - a) . (x - a)$$

sie ist aber gar nicht uninteressant, weil daraus augenscheinlich das Theorem gleichsam hervorgehet:

„Bei conjugirten Hyperbeln ist die Absciſſe, „welche einer ausserhalb der Curve befindlichen Or„dinate zugehört, quadrirt genommen, (CQ^2) „jederzeit so gros, als ein Rechtek aus den 2 „andern sich correspondirenden von den zwei „Scheiteln ausgehenden Absciſſen, deren Ordi„naten innerhalb der Curven stehen.“

(AP.BP) d. i. $(x - a)(x + a) = vv$.

Hiebei kann man sich auch aus §. 41 erinnern, daß ein Rechtek, aus der Absciſſe vom Mittelp. und der Subtang. ($CP.PT = x . PT$) eben so gros, und daher ebenfalls $= vv$ sei.

§. 50.

Mit diesen Vorkenntnissen ausgerüstet, gehn wir zu dem Theorem über, daß

die Differenz der Quadrate zweier conjugirten Diameter allemal der Diff. der Quadrate der 2 Axen gleich sei.

Wir sezzen im Beweis halbe Diameter, und halbe Axen, und deren Quadrate, (der Geschmeidigkeit des Ausdruks wegen) so, daß uns obliegt, zu beweisen:

mm — nn sei = aa — bb.

In der Figur sei CI = m; und CN = n. Die Evidenz der Behauptung ergiebt sich so:

(I) mm ist = (CP^2 + PI^2)

= xx + (bbxx : aa) — bb,

wo der Werth von yy, wie auf S. 94. geflissentlich so gesezt wird. Die Absicht wird sich sogleich zeigen.

(II) nn ist = (CQ^2 + QN^2)

= xx — aa + (bbvv : aa) + bb wie aus den Gleichungen des vorherg. § folgt. Denn da ward am Schluß vv oder CQ^2 = xx — aa erwiesen, und sogleich im Anfang gezeigt, wie aa : bb = (aa + vv) : QN^2 bestehe, woraus der Werth für QN^2 sich ergiebt.

(III) Man sezze in der Gleichung zu nn, da wo vv vorkommt, das Aequival. mit xx — aa ein, so wird damit stehen

nn = xx — aa + [bb (xx — aa) : aa] + bb

wo man das Aepuiv. von yy bald erkennen wird. Schreibt man aber dasselbe, wie in Nr. I; so hebt sich — bb mit + bb, und alsdenn erscheint noch

nn = xx — aa + (bbxx : aa)

(IV) Endlich ziehe man von mm, und dessen Werth, nn ab, wie auch dessen Werth, so zeigt sich mm — nn sei,

= [xx + (bb : aa) — bb — xx + aa — (bbxx : aa)]

wo sich alle Grösen haben bis auf

[— bb + aa] welche man nur in der Stellung umwenden darf, um den Saz,

mm — nn sei = aa — bb

ganz ins Reine gebracht, vor sich zu sehen.

Der gelehrte Marq. Del'Hospital hat §. 125. (in seinen ang. Traité) den Beweis dieses Sazzes ebenfalls, aber unter ganz andern Voraussezzungen, mit Zuziehung der Asympt. und mittelst Zeichnung besondrer Hülfslinien, gegeben. Mir hat der hier beigebrachte Beweis viel kürzer geschienen.

Bei der gleichseitigen Hyperbel verschwindet die Differenz; und damit wird man darauf geleitet, daß da alle conjugirte Diameter unter sich gleich seien, wie es die Axen sind; also auch die Helften; m = n; und CI so lang, als CN.

Bei ungleichs. Hyp. aber kann man aus der beigebrachten Gleichung selbst den Saz ableiten:

$$(a + b) : (m + n) = (m - n) : (a - b)$$

daß nehmlich die Summe der 2 Axen, und die zweier conjugirten Diameter sich in jeder Hyperbel umgekehrt, wie die Differenzen dieser Axen und Diameter gegen einander verhalten.

Auch ist noch folgendes

Corollarium,

eines wichtigen Theorems wegen, bei dem dessen Anwendung (unten in §. 55.) vorkommen wird, wohl zu merken:

Aus $CI^2 - CN^2 = aa - bb$ folgt, CN^2 allein sei so viel, als $= CI^2 - aa + bb$

d. h. $= [xx + (bbxx : aa) - bb] - aa + bb$

wenn man nehmlich, aus Nr. I. des nächstvorhergehenden Blatts, den Werth von CI^2

oder

oder mm einsezt. Bei dieser Zusammensezzung aber hebt sich bb; und die übrige Grösen stehen, unter einen Nenner gebracht, in folger Gestalt:

$$[(aaxx + bbxx - aaaa) : aa] = CN^2 \text{ oder } CM^2$$

woraus natürlich die Helfte des conjugirten Diameters unquadrirt, oder die Linie CM allein den Ausdruk

$$\frac{\sqrt{(aaxx + bbxx - aaaa)}}{a} = CM$$

zur Gleichungsgröse erhält.

§. 51.

Man verlängere den Diameter IH bis O; auch nach Gefallen weiter; von O, bis an den Punkt der Curve, V, sei schiefhin eine Ordinate gezogen, welche dem conjugirten Diameter paralel laufe. So sind VO und OI Coordinaten; OI und OH aber zwo sich correspondirenden Absciſſen, die diesen Namen wohl tragen dürfen, wie wir ihn den Linien AP und BP bei rechtwinklichten Coordinaten schon gegeben haben. So kan man auch ein Rechtek aus ihnen zusammen ordnen, (OI . OH),

wie aus AP und BP ein bekanntes Rechtek, das so oft schon vorgekommen, construirt worden.

Man fälle ein Loth von O auf die verlängerte erste Axe; OR; es ist mit der bekannten Ordinate PI paralel; und so mit ergiebt sich aus der Zeichnung die Proportion

CP zu CI, = wie CR zu CO

x : m = wie f : (mf : x)

insoferne der halbe Diameter CI wieder = m gilt, und die Abscisse CR = f genannt wird. Weil nnn aber OI sich als die Differenz CO — CI; hingegen OH als OI + IH in der Zeichnung darstellt, so mus natürlich in algebr. Signaturen

OI = (mf : x) — m; und OH = (mf : x) + m

erscheinen, weil IH ja 2m gilt, und der Werth von OI + 2m nichts anders ausgeben kann.

Ein Rechtek, (OI . OH) mus deshalb gewis

= (mmff : xx) — mm, oder [mm (ff — xx) : xx]

ausgeben. Und hieraus lässt sich der Saz bilden, daß, da f und x rechtwinklicht geordnete Abscissen sind,

„die kleinere derselben im Quadrat, zur Differenz der Quadrate von ihnen beeden sich

„verhal-

„verhalte, wie das Quadrat des (schiefen)
„Halbdiameters, zu dem Rechtek der Ab-
„scissen auf ihm, die sich selbst darstellen,
„wenn er verlängert wird.

Will man (ff — xx), als (f + x).(f — x) ansehen, so gelangt man zu einer Vergleichung zweier Rechtekke, welche nicht weniger interessant ist; nehmlich
CP^2 zu [(CR + CP) PR] wie CI^2 zu (OI.OH) und diese Rechtekke stehen, also gegen einander, wie die Quadr. des Kathetus und der Hypotenuse in dem Dreiek CIP, welches ganz wesentlich zu der vorliegenden Construction gehört, und die Abscissen nebst dem Halbdiameter, CP und CI, auf die hier alles ankommt, enthält.

§. 52.

Die Verhältnis des quadrirten Halbdiameters, mm, zu OI . OH ist aber nicht nur
= xx : (ff — xx), sondern auch
= $CQ^2 : RS^2$. Diese Behauptung ist sehr wichtig.

Ein Loth von dem Punkt V der Curve, (wo die schiefe Ordinate VO sie trifft) auf die

verlängerte erste Axe gelassen, veranlasst eine neue mit OR und PI paralele Ordinate, SV; und den damit bestimmten Abstand von R, welcher eben RS ist, und kurz = g heissen soll. Nun lässt sich auf verschiedene Art darthun, daß

xx : zu ff — xx = wie xx — aa : zu gg

statt habe, und also g durch f und x und a sich ausdrükken lasse.

Man ziehe mit RS eine Paralele OK von dem Punkt O aus; senkrecht auf die neue grose Ordinate SV; so bildet sich damit ein rechtwinklichtes Dreiek VOK, dessen Basis OK = RS ist. Dieses Dreiek ist dem rechtwinkl. Dreiek CQN ähnlich, weil VO mit CN paralel läuft; der Winkel bei O deshalb so gros, als der bei C ist; und daher ein Verhalten eintrit, wie §. 49. Nr. IV. schon betrachtet worden. Es ist demnach an der Proproportion gar nicht zu zweifeln:

CN zu CQ = wie VO zu OK. Man quadire diese vier Grösen, und sezze für die drei ersten die algebraische Werthe; nehmlich

für $CN^2 : CQ^2$ schreibe man nn : xx — aa, den Ausdrükken des §. 49. gemäs;

Für

Für VO^2 aber, welches
$[CN^2 . (CO^2 - CI^2) : CI^2]$ zum Aequiv. hat, (nach dem in §. 46. gegebenen Beweis), schreibe man

$$[nn . ((mf : x)^2 - mm) : mm]$$

das ist $[nn . ((f : x) - 1)]$ und nehme darauf Multiplication und Division vor, um das lezte Glied OK^2 oder gg in algebraischen Signaturen zu erhalten, so wird jeder ohne Mühe finden, daß statt habe,

$$nn : xx - aa$$
$$= nn . [(f : x)^2 - 1] : [(ff - xx)(xx - aa) : xx]$$

weil sich nn hebt, und $(f : x)^2 - 1$ durch Reduction auf einen Nenner die Gestalt von $(ff - xx) : xx$ bekommt. Demnach ist dargethan, daß gg den Werth des 4ten Gliedes, wie es jezt signirt ist, habe, und also

xx zu ff — xx = wie xx — aa zu gg

sich sicher verhalte.

Nimmt man daher die Proportion, die am Schluß des vorh. §. 51. steht, wieder in Betracht, so erkennt man, daß zusammen gehören:
CI^2 zu $(OI.OH)$, wie CQ^2 zu OK^2, wie CN^2 zu VO^2
$mm : OI.OH = xx - aa : gg = nn : nn(ff - xx) : xx$

Und,

Und, wenn man aus diesen sechs Verhältnisgliedern folgende vier zusammenordnet:
VO^2 zu (OI.OH) wie CN^2 zu CI^2 (= nn : mm)
so ergiebt daraus das folgende nunmehr bereits bewiesene Theorem:

„Das Quadrat der schiefen Ordinate auf dem
„1sten Diameter innerhalb der Curve
„verhält sich zu Rechtek der correspond. Abscissen, die auf ihm liegen;
„wie das Quadrat des conjugirten Diameters,
„zum Qu. des ersten Diameters, welchem die
„Ordinate zugehört.

Statt der zween Diameter kann man auch Halbdiameter sezzen, wenn man sich etwa in Worten streng nach der Formel, die blos m und n hat, ausdrükken wollte.

§. 53.

Man wiederhole sich aus §. 51, daß das Rechtek (OI.OH) so viel [(mmff : xx) — mm] betrage, d. i. der Differenz der Quadrate ($CO^2 - CI^2$) gleich sei. Die Figur zeigt, daß man für CO die Paralele Vh, und für VO die Paralele Ch schreiben dürfe. Es wird daher

her ohne Bedenken angehen, die Proportion aufzustellen:

$Vh^2 - CI^2 : CI^2 =$ wie $Ch^2 : CN^2$

Denn die Aequivalente sind ja

$[mm(ff-xx):xx]:mm = [nn.(ff-xx):xx]:nn$

Man addire das 2te zum 1sten Glied; das 4te zum 3ten; die Proportion wird noch bestehen, nach bekannten Gesezzen, als

Vh^2 zu $CI^2 =$ wie $(Ch^2 + CN^2)$ zu CN^2

Um aber ein gefälliges Theorem zu erhalten, mache man vollends das zweite Glied zum dritten, und schreibe mit Rüksicht auf die Figur für die eine Helfte des conjugirten Diameters CN, die andre ganz gleiche, CM; so werden die Verhältnisse dann so aussehen:

$Vh^2 :$ zu $(Ch^2 + CM^2) =$ wie $CI^2 :$ zu CM^2

$(mf:x)^2 : [nn.(ff-xx):xx] + nn =$ wie $mm : nn$

und mit Worten ausgedrükt, wird sich hiermit der Saz ergeben:

„daß das Qu. der schiefen Ordinate auf dem conjugirten Diameter, die ganz ausserhalb der Curve ist,

sich zu der Summe der zugehörigen quadrirten Abscisse (die auf eben diesem Diam. liegt, und vom Mittelpunkt ausgeht), und

dieses

dieses quadrirten Halbdiameters selbst verhalte, wie das Qu. des ersten Diameters zum Quadrat des conjugirten, oder des zweiten.“

Man blikke hiebei in die Figur, und sehe nur, wie nahe beisammen alle diese Linien sich befinden, deren Verhältnisse nunmehr ganz rein aufgedekt liegen.

§. 54. Fig. IX.

Nun kommen wir noch auf ein sehr schönes Theorem, daß nehmlich „jedes Paralelogramm, das mit oder unter 2 conjugirten Diametern construirt wird, keine grösre Fläche habe, als die eines Rechteks unter den 2 Axen.“

Um aber den Beweis desselben zu fassen, ist nöthig, noch vorher den von einem andern Saz zu geben, welcher mit der erwiesenen Proportion des §. 41.

CP zu a = wie a zu CT

connex ist, und, wie folgt, lautet:

PI zu b = wie b zu Ct

Man betrachte, wie die Punkte T und t durch Verlängerung der Tangente entstehen; jener, wenn die Tangente die erste Axe, dieser,

(t) wenn die Tang. die zwote od. conjugirte Axe, hier in deren Verlängerung, berührt od. schneidet. Der Beweis, daß die Helfte dieser zwoten Axe die geom. Mittelproportionale zwischen PI und Ct sei, wird so geführt: Wegen Aehnlichkeit der Dreiekke PTI, und CTt, haben die Verhältnisse statt

PT zu PI, wie CT : Ct

Die algebr. Gleichungen zu den 3 ersten Grösen sind bereits oft genug vorkommen; insbes. §. 41. Aber man nehme jezt die Ordinaten auf der zwoten Axe nach §. 48, wo y und x gewechselt werden, so wird erscheinen:

$(y^2 - a^2) : y$ zu $x, = (aa : y)$ zu $[(aax) : (yy - aa)]$ und Ct den Werth der lezten Grösen haben. Weiter aber sezze man für yy das Aequival. ein, nach §. 48; so heben sich alle Grösen bis auf $(bb : x) = Ct$; und so erhellet, daß

x : zu $b =$ wie b : zu Ct

stehe, wo man aber wohl zu merken hat, daß x jezt PI vorstelle, also eben die Linie, welche sonst die Ordinate auf der ersten Axe geheissen hat.

§. 55.

§. 55. Fig. IX.

Mit diesen Kenntnissen versehen, schreite man nun zu dem im Eingang des §. 54. angeführten Theorem selbst:

(I) So wie bb = (PI . Ct) ist, kann man auch dafür sezzen (VC . Ct) weil eine einzige Hülfsparalele VC = PI darstellt; und ebenso gros ist das Rechtek (NI . OI), welches man vermittelst Verlängerung der Normale bis an den conjugirten Diameter, Einzeichnung der Hülfsparalele CR, welche OI gleich ist, und Betrachtung der ähnl. Dreikke PIN und CRT zuverlässig einsieht; Denn offenbar ist

CR zu Ct, wie PI zu NI;

dem Product der äussern Glieder aber sind

(OI . NI) = (PI . Ct) = bb

ganz gleich. Daher gelten mus

NI zu b = wie b zu OI

(II) Jezt bedenke man, daß der Linie NI, als einer Normale, die nehmliche Gleichung zukommen müsse, welche in §. 38. angegeben worden; (wo ich freilich nicht NI, sondern NM, der Fig. VI. gemäs, geschrieben habe.) In alge-

algebraischen Signaturen wird deshalb so viel als OI = bb : NI bedeuten:

$$bb.\ \surd\left[\frac{aaaa}{bb.(aaxx + bbxx - a^4)}\right]$$

das ist $[(baa) : \surd(aaxx + bbxx - a^4)]$ wie eine kurze Zusammenordnung der Ausdrükke in §. 38. überzeugend darlegt. Jezt denke man ein Rechtek, aus OI und CM, der Helfte des conjugirten Diameters, errichtet; stelle aber (OI . CM) =

$$\frac{b\ a\ a}{\surd(aaxx + bbxx - a^4)} \times \frac{\surd(aaxx + bbxx - a^4)}{a}$$

insoferne CM ganz so ausgedrükt wird, wie das Corollar am Schluß des §. 50. angiebt; so fällt in die Augen, daß sich alles aufhebt, bis auf b.a; und ebendamit ist dargethan, daß ein Rechtek aus OI und CM errichtet, so gros sei, als eines aus b und a. Aber ein solches Rechtek hat die nehmliche Fläche, welche ein Paralelogramm hat, dessen Seiten durch CM und CI construirt werden. Denn die Helfte dieses Paralelogr. ist doch gewiß in der Figur das Dreiek CIM, dessen Flächeninnhalt = 1/2 (OI . CM) beträgt. Daher das gan-

ze Paralelogr. allerdings (OI . CM) gleich seyn mus; und der obigen Gleichung nach, auch = b . a; Duplirt man nun endlich beede Grösen, so dringt sich damit die Ueberzeugung selbst auf: „daß ein Paralelogram, aus den 2 ganzen conjugirten Diametern, IH und Mm, errichtet, vollkommen so gros seyn müsse, als ein Rechtek aus den 2 Axen; oder

$$4\,(OI\,.\,CM) = (2a)\,.\,(2b)$$

An der Allgemeinheit dieses interessanten Sazzes wird, übrigens wol niemand zweifeln, der nur die algebraische Signaturen und Formeln, vermittelst welcher er bis zur Evidenz durchgeführt worden ist, aufmerksam betrachten mag.

Errata.

Im Isten Heft. S. 43 in der Note. Lin. 1 statt CE lies: AE

Ebendas. Lin. 9 statt unbestimmt lies: von unbestimmter Länge

S. 51 in der Note. Lin. 4 statt es sei fM lies: es sei FM

S. 70 oben Lin. 3 statt jedem angenommen lies: jeder angenommenen

Im IIten Heft. S. 134 mus die lezte Zeile in §. 38 heissen:

$$\sqrt{\left[\frac{3ap + 2pp}{2}\right]} \text{ oder } \frac{b}{a}\sqrt{[3aa + 4bb]} = NM$$

Innhal

Innhalt des 1sten Hefts.

Einleitung.

Ueber das Interesse des Studiums der Conoide, welche die Hyperbel heißt. S. 1—8

1ste Lucubration.

§. 1 Aeussere Gestalt der Hyperbel, durch einen wirklichen Schnitt, in einen Conus geführt. S. 9—12

§. 2 Verschiedenheit der Hyperbeln, nach verschiedenen Richtungen des geführten Schnitts. S. 13. 14

§. 3 Die Gestalt der Hyperbeln, in Trinkgläsern sichtbar, je nachdem sie mit Fluidum gefüllt sind, u. geneigt werden. S. 14—17

§. 4 Betrachtungen über eine Zeichnung zweier entgegengesezten Hyperbeln, in der Figur zweier Kegel. S. 17—21

§. 5 Benennungen und Lagen der zwo Axen

der Hyperbel; Ihre Identität bei gleichseitigen Hyperbeln. S. 21 — 24
§. 6 Ueber den Winkel am Scheitel der Hyperb. welcher die Conoide der Hyp. charakterisirt, wenn er mit dem Scheitelwinkel am Conus verglichen wird. S. 24 — 26
§. 7 Wie die krumme Linie der Hyp. auf einer Ebene geom. gezeichnet werde; durch Dreiekke; durch angespannte Fäden. S. 26 — 32
§. 8 Was Leitpunkte, Brennpunkte, genannt werden S. 32. 33
§. 9 Methode nach Hrn. Vega, so viel Punkte, als man will, für die Curve der Hyp. durch Kreisbögen, welche sich schneiden, zu finden. S. 33 — 35
§. 10 Noch eine Methode die Curve der Hyp. zu zeichnen, wenn blos die Lage der Brennpunkte, und eine Directionslinie, (also noch keine der Axen) gegeben sind. S. 35 — 40

IIte Lucubration.

Ueber die Hyperbel, in Beziehung auf ihre Axen, Ordinaten, und Abscissen.

§. 11 Unterschied, wie die Abscissen genommen werden,

werden, vom Mittelpunkt der Hyp. oder vom Scheitel.
Beleuchtung der Abstandslinie vom Mittelp. d. Hyp. bis zum Brennpunkt.
Gleichung für die zwote Axe, daraus abgeleitet. S. 42—45
Einfachheit der Gleichung bei gleichseitigen Hyperbeln. S. 46
§. 12 Beweis, wie die Fundamentalgleichung für das Qu. der Ordinate in der Hyperbel gefunden wird, ohne die zweite Axe nöthig zu haben. S. 46—53
Geschmeidigkeit der Hauptformel, wenn sie dazu gezogen wird. S. 53—55
§. 13 Folgerungen, wenn man die Fundamentalgleichung in Proportionen auflöst, auseinander sezt, und aus den Differenzen der dabei vorkommenden Quadrate Rechtekke formirt. S. 65—60
§. 14 Deduction des Parameters der ersten und 2ten Axe in der Hyp. S. 60—63
§. 15 Anwendung bei gleichseitigen Hyperbeln; und Betrachtung, in wie weit es angehe, sich zu gewissen Formeln bestimmte geometr. Figuren zu denken.

§. 16 Die Ordinatengleichung, mit Beiziehung des Parameters der ersten Axe ausgedrükt.

§. 17 Beweis, daß ein Quadrat, auf der Ordinate errichtet, jederzeit grösser sei, als Rechtek, das mit dem Parameter und der Abscisse vom Scheitel aus, construirt wird. S. 69—71

Rechtfertigung des Namens der Hyperpel. S. 71

§. 18 Beweis, daß die Entfernung eines Brennpunkts vom nächsten Scheitel jederzeit kleiner, als der 4te Theil des Parameters (der 1sten Axe) sei ($AF < 1/4\ p$)

Der Exponent der Verhältnis ($AF : p$) selbst, näher beleuchtet. S. 73. 73

§. 19 Angabe, wie sich zwo Ordinaten, (sie mögen in einer Hyp. stehen, wo sie wollen) oder deren Quadrate, gegen einander verhalten.

Innhalt des IIten Hefts.

IIIte Lucubration.

Ueber die Abscissen, vom Scheitel angenommen.

§. 20 Deduction der Ordinatengleichung in der Hyperbel, wenn AP = x gilt. S. 77 — 81

§. 21 Vorstellung verneinter und bejahter Abscissen; und was, wenn die Ordinate y verschwindet, in Anseh. der Abscissen, gedenkbar sei. S. 81 — 84

§. 22 Imaginäre Ordinaten, auf welche die Fundamentalgleichung leitet, so oft eine verneinte Abscisse kleiner, als die ganze erste Axe, d. i. kürzer, als 2a angenommen wird. S. 84 — 88

§. 23 Anwendung der allgemeinen Formel auf die bestimmte Linien bis an die zwo Brennpunkte der Hyperbel. Zum Schluß, eine Zurükführung auf eine Behauptung in §. 18 wegen Gleichheit zweier interessanter Rechtekke. S. 88 — 90

IVte

IVte Lucubration.

Ueber die Hyperbel, in Beziehung auf ihre Asymptoten.

§. 24 Angabe, wie die Asymptotenlinien an einer Hyp. zu zeichnen seien. S. 92. 92

§. 25 Ausführung einer neuen Gleichung für die zweite Hauptaxe aus den Ordinaten und ihrem Ueberschuß oder ihrer Verlängerung bis an die gezeichnete Asymptotenlinien; und daraus deducirte Rechtfertigung der Benennung Asymptote. S. 92 — 97

§. 26 Beweis, daß vier gleiche Rechtekke auf den Asymptoten errichtet, (4.CQ.MQ) so viel Fläche zusammen haben, als die Quadrate der zwei Halbaxen (aa + bb) S. 97 — 100

§. 27 Betrachtungen darüber, welche auf die Idee von Coordinaten an den Asymptoten führen. Angabe, worinn diese von den bisher beleuchteten abgehen. S. 100 — 102

§. 28 Die Potenz der Hyperbel, was sie sei, wie sie entstehe. Beweis-Art ihrer Gleichung. S. 102 — 104

§. 29 Aufstellung der geom. Proportion, welche mit der Potenz der Hyperbel wesentlich conner ist.
Auch der für 4 Coordinaten an der Asymptote. Die Abscissen darauf verhalten sich umgekehrt, wie die zugehörige Ordinaten (auf der Asympt. nehmlich) S. 104 — 107
§. 30 Die Abschnitte einer geraden Linie, welche von einer Asymptote bis zur andern geführt wird, sind auf beeden Seiten von gleicher Länge, (nehmlich ihre Endstükke zwischen der Curve und Asymptote, rechts und links) die Linie mag, in welcher Richtung man nur will, die verlängerte erste Axe schneiden. S. 107 — 110
§. 31 Ueber den besondern Reiz des Studiums der Hyperbel, unter ihren Asymptoten betrachtet. S. 110 — 113

Vte Lucubration.

Ueber die Hyperbel, in Beziehung auf ihre Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormallinien.

§. 32 Angabe der Art, wie eine Tangente an einen gegebenen Punkt der Curve (ohne die Asymptoten zu Hülfe zu nehmen) angelegt wird. S. 114 bis 118

§. 33 Die Tangente unter den Asympt. mit der 2ten Are paralel, und nicht paralel, betrachtet. S. 118 bis 121

§. 34 Die Subtangente, was sie sei, an der ersten Are, ohne Asymptoten; u. darauf an den Asympt. betrachtet. S. 121 bis 124

§. 35 Gleiche Dreiekke, durch zwei einander sich unter den Asymptoten kreuzende Tangenten veranlasst; und besondre Phänomene dabei. S. 124 bis 128

§. 36 Normallinie, und Subnormallinie, auf der grosen Are der Hyperbel, (ohne Asymptoten) mit einigen Gleichungen für die leztere. S. 128 bis 132

§. 37 Angabe, in welchem Fall die Subnormale dem Parameter der ersten Are gleich sei; und in welchem der Absc. vom Mittel genommen. S. 132. 133

§. 38 Gleichungen für die Normallinie an der Hyperbel; Beschwerlichkeit und ziemliche Ungeschmeidigkeit eben der hieher gehörigen Gleichungen. S. 133. 134. Ihre Vereinfachung in einem Fall. (Darüber s. die Errata)

§. 39 Die Normale und Subnormale können nie kleiner, als der halbe Parameter der ersten Are werden. Beweis; mit lehrreicher Nebenbemerkung. S. 134 bis 136

Anhang. Gleichung der Normallinie bei Annahme einer gleichseitigen Hyperbel. S. 136

§. 40 Deduction der Gleichung für die Subtangente auf der ersten Are (ohne Asymptoten) blos durch x u. a. S. 136 bis 138

§. 41 Betrachtung der Linie, welche die Summe der Subtangente

tangente und Subnormale ist, TN. Interessante Linien und Rechtekke an derselben, und Gleichungen zu ihnen. S. 139 bis 141

§. 42 Recapitulation der successiven Analysis einer Linie, deren Uebersicht nunmehr notwendig vergnügt. S. 141 bis 142

VIte Lucubration.

Ueber die Hyperbel, in Beziehung auf ihre Diameter.

§. 43 Erklärung, was eine Diameter, und conjugirte Diameter in der Hyp. seien. S. 142 bis 144

§. 44 Ein Diameter, der durch einen Tangentenpunkt geht, halbirt alle Paralelen der Tangente zwischen den Asymptoten. S. 144 bis 146

§. 45 Er halbirt daher auch alle Ordinaten unter dem Scheitel der Curve, sie mögen die erste Axe, unter welchem Winkel, als man nur will, schneiden. Leitung eben von da zu schief construirten Abscissen und Ordinaten. S. 146. 147

§. 46 Beweis, daß die Hauptordinatengleichung, welche §. 12 gegeben, und bis hieher benuzt worden, sich viel allgemeiner fassen lasse, und nicht blos bei rechtwinklicht stehenden Axen und Coordinaten statt habe. S. 147 bis 150

§. 47 Folgerung auf die Verhältnisse aller schief construirten Ordinaten gegen einander. S. 150. 151

§. 48 Notwendigkeit, eine neue (dritte) Hauptgleichung für die Hyperbel beizubringen, in welcher die Ordinaten nicht auf der ersten, sondern auf der zwoten Axe und mit der ersten Axe paralel angenommen werden. S. 151 bis 155

§. 49 Benüzzung dieser Vorstellung bei conjugirten Hyperbeln; und Deduction der Gleichung für eine innerhalb der Curve, und für eine ausserhalb der Curve befindliche Ordinate. S. 155 bis 159

§. 50

§. 50 Beweis, daß die Quadrate der 2 Axen jederzeit so viel von einander unterschieden seien, als die Quadrate zweier conjugirten Diameter, wo man nur dieselbe in einer Hyp. nehmen mag. 160 bis 63

§. 51 Betrachtung des Rechteks, welches aus 2 sich correspondirenden Abscissen, die von einer schiefen Ordinate ausgehen, und auf einem ersten Diameter liegen, construirt wird. S. 163 bis 165.

§. 52 Verhältnis dieses Rechteks zu andern quadrirten Linien, namentlich zum Qu. der schiefen Ordinate, und des ersten Diameters. S. 165 bis 168.

§. 53 Verhältnis der 2 conjugirten Diameter, im Qu. genommen, verglichen mit quadrirten Coordinaten, die ganz ausserhalb der Curven liegen. S. 168 bis 70

§. 54 Die zwote Halbaxe als geom. Mittelproportionale zwischen 2 Linien betrachtet, von welchen die eine auf ihr selbst liegt. Neue Gleichung. S. 170. 171.

§. 55 Beweis, daß ein Paralelogramm, mit 2 conjugirten Diametern erricotet, wo solche auch liegen mögen, niemals eine grössere Fläche habe, als die eines Rechteks unter den zwo Axen. S. 172 bis 174.

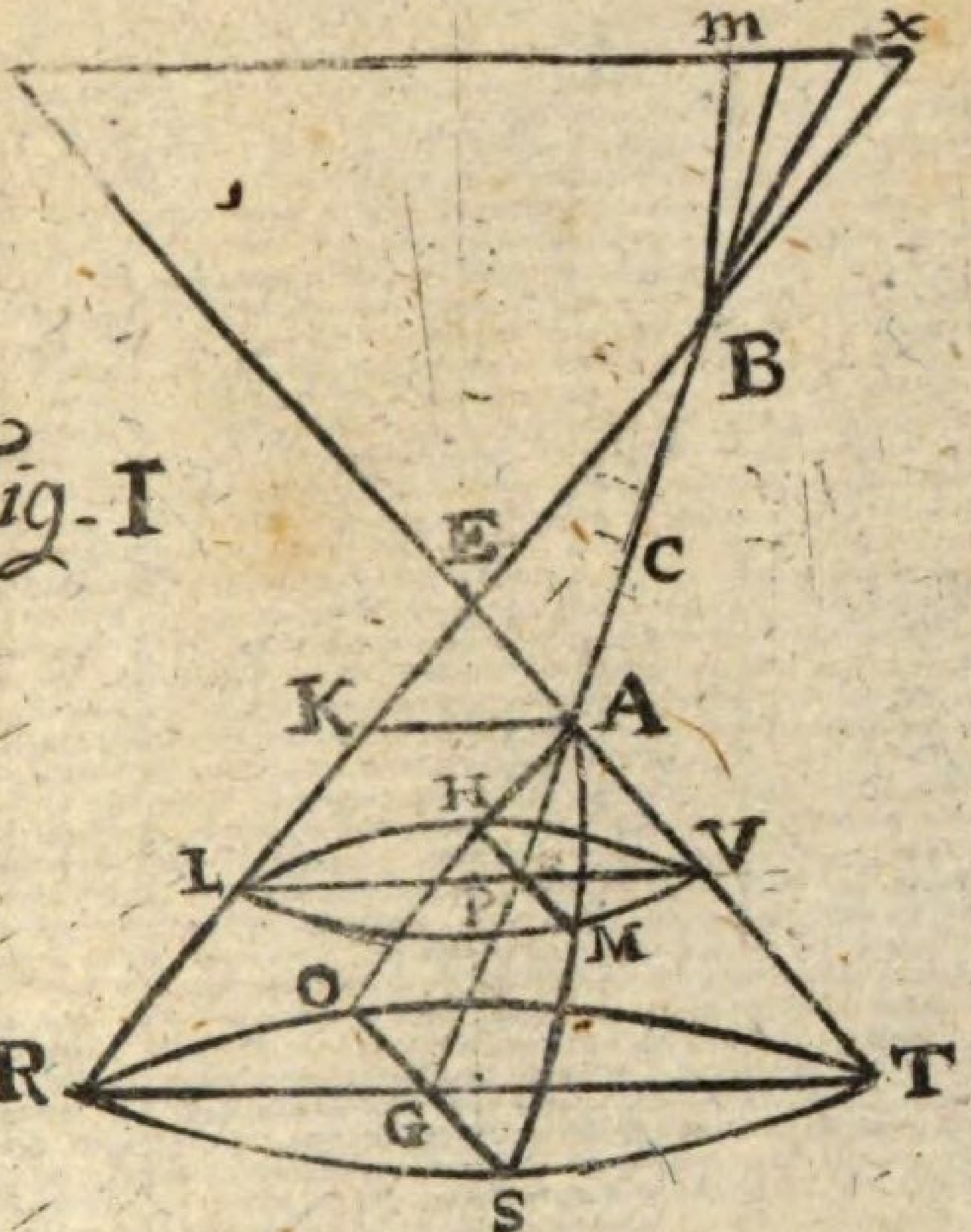

Fig. I

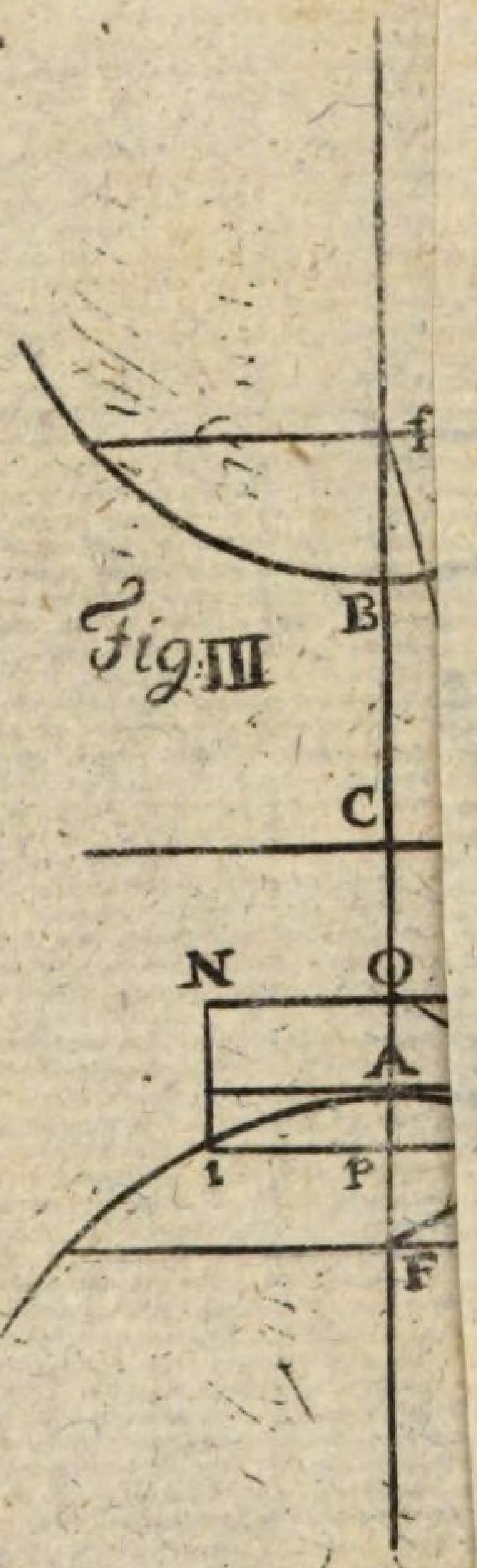

Fig. III

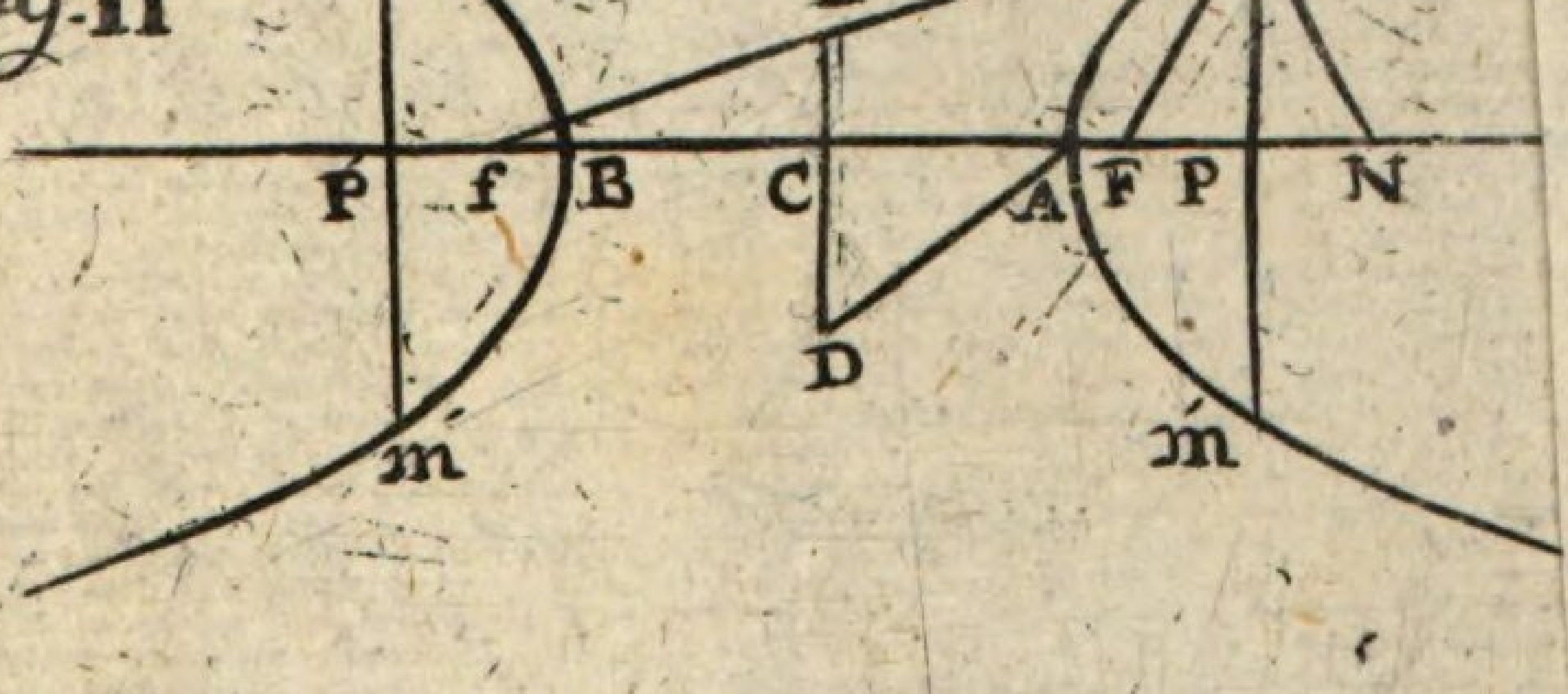

Fig. II

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schübler, Christian L.

Beleuchtungen der interessanten Unterhaltung, welche die Convide der Hyperbel gewährt

Bd.: 1. (1792).

Mannheim 1792

Math.p. 513-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082780-6
VD18 80019544-001